Программа экзамена по алгебре

(лектор – А. И. Генералов; гр.111–113; зима 2003/2004 уч.г.)

Глава I. ПОЛЯ И МНОГОЧЛЕНЫ.

[см. "Вопросы коллоквиума"]

Глава II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

2.1.Определение линейного пространства. Сумма и пересечение линейных подпространств. Множество образующих. Линейная зависимость и линейная независимость векторов линейного пространства
2.2.Понятие базиса линейного пространства. Эквивалентность различных условий, определяющих понятие базиса
2.3.Теорема: число элементов конечного поля — степень простого числа
2.4.Теорема о существовании базиса линейного пространства
2.5.Теорема о совпадении мощностей различных базисов. Понятие размерности линейного пространства
2.6.Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций
2.7.Алгебраические операции над матрицами. Кольцо матриц
2.8.Понятие матрицы перехода при замене базисов, его свойства. Обратимые матрицы как матрицы перехода
2.9.Понятие изоморфизма линейных пространств. Критерий изоморфизма
2.10.Определяемость линейного отображения своими значениями на базисе
2.11.Матрица линейного отображения, ее изменение при замене базисов. Связь координат векторов при линейном отображении. Матрица композиции линейных отображений
2.12.Пространство $\mathrm{Hom}(L_1, L_2)$
2.13.Ядро и образ линейного отображения
2.14.Прямая сумма линейных пространств. Связь с понятием базиса
2.15.Теорема о выделении подпространства в качестве прямого слагаемого
2.16.Размерность прямой суммы линейных пространств
2.17.Теорема о размерностях суммы и пересечения подпространств
2.18.Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения. Следствия
2.19.Конструкция и свойства ("внешней") прямой суммы линейных пространств. Характеризация проекторов на прямое слагаемое

Глава III. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

3.1.Элементарные преобразования над матрицами и матрицы элементарных преобразований. Обратимость матриц элементарных преобразований
3.2.Теорема о приведении матрицы к трапециевидной форме. Матричная переформулировка
3.3.Представимость обратимой матрицы в виде произведения матриц элементарных преобразований, приложение к алгоритму нахождения обратной матрицы
3.4.Теорема о PDQ-разложении матрицы. Приложение: канонический вид матрицы линейного отображения
3.5.Пространство строк и пространство столбцов матрицы. Их свойства по отношению к элементарным преобразованиям матрицы. Теорема о совпадении ранга по строкам и ранга по столбцам
3.6. Размерность образа и ранг матрицы линейного отображения
3.7.Ранг суммы и произведения матриц
3.8.Критерий обратимости матрицы, использующий понятие ранга
3.9.Матричная запись систем линейных уравнений. Анализ систем линейных уравнений по "методу Гаусса"
3.10.Теорема Кронекера–Капелли
3.11.Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Связь решений системы линейных уравнений с решениями соответствующей однородной системы

3.12.Индуктивное определение определителя. Примеры ($n = 2, n = 3$)
3.13.Определители и элементарные преобразования
3.14.Определитель Вандермонда
3.15.Определитель произведения матриц
3.16.Приложение определителей к вычислению обратной матрицы
3.17.Формулы Крамера для решений систем линейных уравнений
3.18.Совпадение ранга и минорного ранга матрицы
3.19.Теорема о “методе окаймляющих миноров”
3.20.“Формула полного развертывания” определителя (без док-ва)
3.21.Собственные числа и собственные векторы матрицы. Собственное подпространство матрицы
3.22.Характеристический многочлен матрицы, его связь с собственными числами
3.23.Линейная независимость собственных векторов матрицы, принадлежащих различным собственным числам
3.24.Вещественность собственных чисел вещественной симметрической матрицы
3.25.Ортогональность собственных векторов симметрической вещественной матрицы, принадлежащих различным собственным числам
3.26.Теорема Гамильтона–Кэли (без док-ва)

Глава IV. КОЛЬЦА И ИДЕАЛЫ

4.1.Определение идеала (правого, левого, двустороннего). Пересечение и сумма идеалов. Примеры
4.2.Понятие множества образующих (для идеалов). Конечно порожденные идеалы, главные идеалы. Описание идеала, порожденного фиксированным множеством образующих
4.3.Теорема: любой собственный левый идеал содержится в максимальном левом идеале
4.4.Идеалы в коммутативных кольцах. Простые идеалы. Простота максимальных идеалов
4.5.Области главных идеалов. Н.О.Д. и Н.О.К. в областях главных идеалов
4.6.Теорема: любая евклидова область — область главных идеалов
4.7.Условие обрыва возрастающих цепей идеалов в областях главных идеалов
4.8.Теорема о представлении идеалов области главных идеалов в виде произведения максимальных идеалов. Следствия. Сравнение простоты и максимальности идеалов в областях главных идеалов
4.9.Построение фактор-кольца. Характеризация простоты (соответственно, максимальности) идеала коммутативного кольца с помощью соответствующего фактор-кольца
4.10.Построение поля из четырех элементов
4.11.Понятие гомоморфизма колец. Примеры. Ядро гомоморфизма
4.12.Первая теорема об изоморфизме (для колец)
4.13.Вторая теорема об изоморфизме (для колец)