

О Л И М П И А Д А В Ы П У С К Н И К О В

1997 (II)

1. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 2.$$

б) Числа p и q выбираются случайным образом из отрезка $[-1; 1]$. Найдите вероятность того, что многочлен $px^2 + qx - 1$ имеет вещественные корни.

в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}$ также можно составить треугольник.

г) Дан треугольник ABC . Докажите, что если

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B},$$

то треугольник ABC либо прямоугольный либо равнобедренный.

2. а) Решите неравенство $\log_2^2 x + 3 \log_2 x \log_2(x-2) + 2 \log_2^2(x-2) \geq 0$.

б) Решите уравнение $4 \sin x \cos 2x \cos 4x = \sin 7x$.

в) Найдите все b , при которых система неравенств

$$\begin{cases} y + x^2 \leq b, \\ x + y^2 \leq b \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. а) Решите уравнение $1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{4k-2} = 2kx^{2k-1}$.

б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ± 1 , то все его корни по модулю меньше двух.

в) Известно, что $a < b < c$, $a + b + c = 6$, и $ab + bc + ac = 9$. Докажите, что $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.

4. а) Найдите все пары a, b комплексных чисел, таких что

$$|a| = |b| = 1 \quad \text{и} \quad |a+b| = |a^2 + b^2|.$$

б) Докажите, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то

$$|a+b+c| = |ab+bc+ac|.$$

в) Докажите, что если

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0, \end{cases}$$

то $\sin 3x = \sin 3y = \sin 3z$.