ОЛИМПИАДА ВЫПУСКНИКОВ

1997 (I)

1. а) Решите уравнение
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$
   б) Числа p и q выбираются случайным образом из отрезка $[0;1]$. Найдите вероятность того, что многочлен x^2+px+q имеет вещественные корни.
   в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c, то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).
   г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$.

2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1)\geqslant \lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.
   б) Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x=\cos 7x$.
   в) Найдите все b, при которых система неравенств
$$\begin{cases} y\geqslant (x-b)^2,\\ x\geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$
   имеет единственное решение.

3. Пусть $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$.
   а) Докажите, что если $p(k)\in\mathbb{Q}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, то $a_i\in\mathbb{Q}$ при всех $i=0,1,\dots,n$.
   б) Докажите, что из того, что $p(k)\in\mathbb{Z}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, не следует, что $a_i\in\mathbb{Z}$ при всех $i=0,1,\dots,n$.
   в) Пусть $q_i(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)}{i!}$, $q_0(x)=1$. Докажите, что если $p(k)\in\mathbb{Z}$ при всех $k\in\mathbb{Z}$, то $p(x)=\sum b_iq_i(x)$, где $b_i\in\mathbb{Z}$ при всех $i=0,1,\dots,n$.

4. а) Какое из чисел больше 2^{300} или 3^{200}?
   б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.
   в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800}.