ОЛИМПИАДА ВЫПУСКНИКОВ

1996 (II)

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение
$$ax^{13} + x - 1 = 0?$$
   б) Пусть $p = b_1 b_2 \cdots b_n$ $(b_i \geqslant -1)$. Докажите неравенство
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqslant n + \ln p.$$
   в) Пусть A, B, C — вершины некоторого треугольника. Докажите, что если
$$\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0,$$
   то этот треугольник — равнобедренный.

   г) Пусть $g(x) = \int\limits_0^x \cos^n t\, dt$. Докажите,что функция g периодична.

2. а) Решите неравенство $|\log_3 x| + \log_{3x} 3| \leqslant \frac{5}{2}$.

   б) Найдите все числа $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, для которых справедливо неравенство
$$\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \geqslant 1?$$
   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение
$$\sqrt{x^2 + 1} = ax + b \ (b < 0)$$
   имеет решение.

3. Про последовательность (c_n) известно, что $c_1 = c > 0$ и $c_{n+1} = 2\dfrac{\sqrt{c_n^2 + 4} - 2}{c_n}$.

   а) Докажите, что последовательность c_n монотонна и вычислите ее предел.

   б) Докажите, что если $c = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n c_n = \pi$.

   в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность.

4. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O.

   а) Докажите, что $\overline{OA_0} + \overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_4} = \overline{0}$.

   б) Докажите, что $(A_0 A_1 \cdot A_0 A_2)^2 = 5$.

   в) Докажите, что многочлен $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.