О Л И М П И А Д А   В Ы П У С К Н И К О В

1996 (I)

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение
$$x^{11} - ax + 1 = 0?$$

   б) Пусть $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($a_i \geqslant -1$). Докажите неравенство
$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1) \leqslant e^s.$$

   в) Пусть A, B, C — вершины некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если
$$\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0,$$
   то этот треугольник — равнобедренный.

   г) Пусть $f(x) = \int\limits_0^x \sin^{1995} t\, dt$. Решите уравнение $f(x) = 0$.

2. а) Решите неравенство $\log_2 x + |\log_{2x} 2| \geqslant \frac{3}{2}$.

   б) Верно ли, что при всех $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ справедливо неравенство
$$\cos^2 k + \cos^2 2k + \cos^2 3k \geqslant 1?$$

   в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, таких что уравнение
$$\sqrt{x^2 - 1} = ax + b \ (b > 0)$$
   имеет решение.

3. Про последовательность (x_n) известно, что $x_1 = 1$ и если $x_n = \frac{p}{q}$, то $x_{n+1} = \frac{p+2q}{p+q}$.

   а) Докажите, что каждая из дробей, появляющаяся в этой последовательности несократима.

   б) Докажите, что последовательность $a_n = |x_n^2 - 2|$ монотонна.

   в) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Про последовательность (q_n) известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \leqslant q_1 + \dots + q_n + 1$.

   а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.

   б) Докажите, что если последовательность (q_n) такова, что всякое натуральное число представляется в виде суммы некоторых членов последовательности (q_n) единственным образом, то
$$(1 + x^{q_1})(1 + x^{q_2})\dots(1 + x^{q_n}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^N.$$

   в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.