ОЛИМПИАДА ВЫПУСКНИКОВ

1995 (II)

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения
$$\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg}^2 x = 10.$$
   б) Найдите число решений уравнения $2 + ax = \sqrt{5-x}$.
   в) Докажите, что уравнение $1 + 9^{9x} + 5^x = 4x + 3$ имеет ровно два решения.
   г) Докажите, что выражение $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел a, b лежит между c и d.

2. Последовательности (a_n) и (b_n) связаны соотношениями
$$a_{n+1} = \frac{b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}.$$
   а) Пусть $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$. Положим
$$\Delta_n = \sqrt{(a_n - \frac{1}{3})^2 + (b_n - \frac{2}{3})^2}.$$
   Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.
   б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не звисят от выбора a_1 и b_1.
   в) Лучи l_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч l_1 образует угол $\frac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а луч m_1 — угол $\frac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч l_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а луч m_n — биссектрисой угла между осью ординат и лучом l_{n-1}. Вычмслите с точностью до $0,01$ угол между лучом l_{40} и осью абсцисс.

3. а) Известно, что $x + y = 2,\ x^3 + y^3 = 5$. Найдите $x^5 + y^5$.
   б) Докажите, что если многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$, то многочлен $x^{4n} - 1$ делится на $x^{4k} - 1$.
   в) Докажите, что многочлен $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)\ldots(x^{n+k-1})$ делится на многочлен $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)$.

4. а) Некто имеет чашечные весы и набор разновесок в $1, 5, \ldots, 5^{1995}$ грамма (по одной каждого веса). Докажите, что ему не удастся разложить их по чашечным весам так, чтобы весы были в равновесии.
   б) Вычислите интеграл
$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin 5x \ldots \sin 5^{1995} x\, dx.$$
   в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, из образовавшихся кусков можно составить треугольник.