ОЛИМПИАДА ВЫПУСКНИКОВ

1995 (I)

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения
$$\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 x = 10.$$

   б) Найдите число решений уравнения $1 + ax = \sqrt{x+3}$.

   в) Докажите, что уравнение $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$ имеет ровно два решения.

   г) Найдите наибольшее по модулю значение выражения $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22)$ при $x \in [8; 22]$.

2. Последовательности (a_n), (b_n), и (c_n) связаны соотношениями
$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

   а) Найдите пределы этих последовательностей, если $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, и $c_1 = 2$.

   б) Пусть $\xi = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$. Докажите, что число ξ является общим пределов этих последовательностей.

   в) Дан треугольник с углами $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{4}{7}\pi$. Биссектрисы углов этого треугольника пересекаются с описанной вокруг него окружности в точках A_1, B_1, C_1. Биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются с с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 и т.д. Вычислите углы треугольника $A_{40}B_{40}C_{40}$ с точностью до $0,01$.

3. а) Докажите, что если число $x + x^{-1}$ — целое, то при всех $n \in \mathbb{Z}$ число $x^n + x^{-n}$ также целое.

   б) Докажите, что число $[(3+\sqrt{5})^n] + 1$ делится на 2^n.

   в) Докажите, что если многочлен $x^n + 1$ делится на многочлен $x^k + 1$, то многочлен $x^{4n} + 1$ делится на $x^{4k} + 1$.

4. а) Некто имеет чашечные весы и набор разновесок в $1, 3, \ldots, 3^{1995}$ грамма (по одной каждого веса). Докажите, что ему не удастся разложить их по чашечным весам так, чтобы весы были в равновесии.

   б) Вычислите интеграл
$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos 3x \ldots \cos 3^{1995}x\ dx.$$

   в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что длина каждого из кусков не превосходит половины длины палки.