О Л И М П И А Д А   В Ы П У С К Н И К О В

1994 (I)

1. а) Найдите все такие значения a и b, что система
$$\begin{cases} x + |y-a| \leqslant b, \\ y \geqslant 2|x-b| \end{cases}$$
имеет единственное решение.

   б) Докажите, что кривая
$$x^4 + 1994x^3y - 6x^2y^2 - 1994xy^3 + y^4 = 0$$
делит единичную окружность на восемь равных дуг.

   в) Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2 - y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.

2. а) Решите неравенство $x + \sqrt[3]{|3x+1| - 1} \geqslant 0$.

   б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$, лежащие на промежутке $[0; \pi]$.

   в) Решите уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 3^x + 2^x$.

3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = \ln x$, которые проходят через начало координат.

   б) При каких a уравнение $\ln x = ax$ имеет решения.

   в) Сколько решений имеет уравнение $6^x = x^6$?

   г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?

4. а) Докажите, что число различных способов замощения полоски размером $2 \times n$ "доминошками" равно n-му числу Фибоначчи.

   б) Найдите формулу для суммы квадратов коэффициентов разложения бинома $(x+1)^n$.

   в) Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их в любом порядке. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?