ОЛИМПИАДА ВЫПУСКНИКОВ

1993 (II)

1. а) Постройте график функции $y = |\log_{\frac{4}{x}}(4x^2)|$.

   б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, для которых при всех x справедливо неравенство $\sin(x + a) \geqslant \sin x + b$.

   в) Найти наибольший радиус полукруга, лежащего в верхней полуплоскости, касающегося оси абсцисс в начале координат и не имеющего других общих точек с параболой $y = x^2$.

   г) Докажите, что

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx > 0 \quad \text{при всех натуральных} \quad n.$$

2. а) Решите неравенство $2x \cdot 2^{\sqrt{3-x}} + 3 \cdot 2^{x-1} > x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\sqrt{3-x}}$.

   б) Решите неравенство $\cos^2 x + \dfrac{2}{\cos x} \leqslant 2 - \cos x$.

   в) Докажите, что не существует прямых, касающиеся графика функции $y = x^3 + 19x^2 + 9x + 3$ в двух различных точках.

3. В условии этой задачи все числа — комплексные.

   а) Нарисуйте образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$ при отображении, сопоставляющем числу z число z^{-1}.

   б) Докажите, что если

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

   то треугольник с вершинами в точках a, b, c содержит начало координат.

   в) Докажите, что всякий корень уравнения

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \frac{1}{z - c_3} = 0$$

   лежит в треугольнике с вершинами в точках c_1, c_2, c_3.

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове "аллах".

   б) Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} C_n^{k-1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n + 1}.$$

   в) Имеются две монеты, одна из которых фальшивая: на обеих ее сторонах изображен герб. Случайным образом выбрали одну монету. Какова вероятность того, что монета фальшивая, если она лежит гербом вверх?