О Л И М П И А Д А   В Ы П У С К Н И К О В

1993 (I)

1. а) Постройте график функции $y = \log_{2x} \dfrac{4}{x}$.

   б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a, b)$, координаты которых удовлетворяют условию
$$\max_{x\in\mathbb{R}} a^{\sin x} = \max_{x\in\mathbb{R}} b^{\cos x}$$

   в) Найти все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x = 1 - ay^2, \\ y = 1 - ax^2 \end{cases}$$
имеет два решения.

   г) Докажите, что
$$\int\limits_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2}\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

2. а) Решите неравенство $x \cdot 2^{\sqrt{x+2}} + 2^x \geqslant 2^{\sqrt{x+2}} + x \cdot 2^x$.

   б) Решите неравенство $\sin^2 x + \dfrac{2}{\sin x} \leqslant \sin x + 2$.

   в) Найти все прямые, касающиеся графика функции
$$y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$$
в двух различных точках.

3. Пусть $p_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ и $Q_{k,n}(x) = p_k(x^n)$, $k, n \in \mathbb{N}$.

   а) Докажите, что многочлен $p_{2m}(x)$ не имеет вещественных корней.

   б) Найдите все такие n, при которых многочлен $Q_{2,n}(x)$ делится на $p_2(x)$.

   в) При каком условии на k и n многочлен $Q_{k,n}(x)$ делится на $p_k(x)$?

4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове "баобаб".

   б) Докажите тождество
$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}.$$

   в) Двое играют в такую игру: монету бросают два раза и первый из двух игроков выигрывает, если оба раза она упала одной и той же стороной. Известно,что монета фальшивая, так что вероятность появления герба при одном бросании равна $p \neq \frac{1}{2}$. При каких p чаще будет выигрывать первый игрок?