Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{(1-t^\alpha)(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{(1-t)\ln t}\,dt$. Его производная по α равна $\frac{dI}{d\alpha} = -\int\limits_0^1 \frac{t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{1-t}\,dt$. Поскольку

$$t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma) = (t^\alpha - t^{\alpha+\beta}) - (t^{\alpha+\gamma} - t^{\alpha+\beta+\gamma}),$$

то

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\left(\frac{d\ln\Gamma(\alpha+\beta+1)}{d\alpha} - \frac{d\ln\Gamma(\alpha+1)}{d\alpha}\right) + \left(\frac{d\ln\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{d\alpha} - \frac{d\ln\Gamma(\alpha+\gamma+1)}{d\alpha}\right) = \frac{d}{d\alpha}\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)}$$

и

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} + C(\beta,\gamma).$$

При $\alpha = 0$ имеем $I(0,\beta,\gamma) = 0$, следовательно,

$$C(\beta,\gamma) = -\ln\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}$$

и

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)} - \ln\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)} = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}.$$

§ 4. УПРАЖНЕНИЯ

Несобственные интегралы, независящие от параметра

В следующих примерах непосредственно установить сходимость интеграла, и в этом случае найти его величину, или установить расходимость.

1) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1.$

2) $\int\limits_0^{10} \frac{dx}{x^\alpha}.$

3) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$

4) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$

5) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)(2x-1)}.$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx.$

7) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}.$

8) $\int\limits_3^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^2}.$

9) $\int\limits_{-3}^3 \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^2}.$

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad a \neq 0,\ b \neq 0.$

11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+3}.$

12) $\int\limits_{-5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}.$

13) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}.$

14) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-7}\,dx.$

15) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}.$

16) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad ab \neq 0.$

17) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

18) $$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

19) $$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$$

20) $$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad ab \neq 0.$$

21) $$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

22) $$\int\limits_{1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

23) $$\int\limits_{0}^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}.$$

24) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

25) $$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

26) $$\int\limits_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}.$$

27) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

28) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

29) $$\int\limits_{a}^{b} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx, \quad a < b.$$

30) $$\int\limits_{a}^{b} x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx, \quad a < b.$$

31) $$\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b.$$

32) $$\int\limits_{a}^{b} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b.$$

33) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}.$$

34) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}},$$
$0 < \alpha\beta < 1,\ |\alpha| < 1,\ |\beta| < 1.$

35) $$\int\limits_{-2}^{+\infty} e^{1-2x}\,dx.$$

36) $$\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cdot 5^{-x}\,dx.$$

37) $$\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$$

38) $$\int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}.$$

39) $$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin 2x\,dx.$$

40) $$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos\alpha x\,dx.$$

41) $$\int\limits_{1}^{+\infty} \ln x\,dx.$$

42) $$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$$

43) $$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}.$$

44) $$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

45) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

46) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\ln x}.$$

47) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

48) $$\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

49) $$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

50) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

51) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[3]{\arcsin x}}.$$

52) $$\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

53) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}\,dx.$

54) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx.$

55) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-a^2x^2)}.$

56) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}(a^2x^2-1)}.$

57) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}.$

58) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}.$

59) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3}\,dx.$

60) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$

61) $\displaystyle\int_0^{1} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$

62) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx.$

63) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx.$

64) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx.$

65) $\displaystyle\int_0^{2} \left(2x\sin\frac{\pi}{x^2}-\frac{2\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x^2}\right)dx.$

66) $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^3}(2x^4-1).$

Исследовать сходимость интеграла от неотрицательной функции.

67) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2}\,dx.$

68) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$

69) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^{\alpha-1}}{|1-x|}\,dx.$

70) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x}{|1-x|^{\alpha}}\,dx.$

71) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3-1)^p}.$

72) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}\,dx.$

73) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-5x+1}{x^4+18x+100}\,dx.$

74) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+2}.$

75) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$

76) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}(x+2)}{x+1}\,dx.$

77) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2}}.$

78) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}.$

79) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}.$

80) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$

81) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)}},\quad \alpha>\beta>5.$

82) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x-3|}}.$

83) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$

84) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad k^2<1.$

85) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx.$

86) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}\,dx.$

87) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx.$

88) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$

89) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-\beta x}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

90) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx.$

91) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx.$

92) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}.$

93) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\, dx, \ n>0.$

94) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^n}\, dx.$

95) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{x^2}\, dx.$

96) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^x}.$

97) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{|k-\sin\varphi|}, \quad 0<k<1.$

98) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}.$

99) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos b}}, \quad 0<b<2\pi.$

100) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^p d\theta, \quad p>0.$

101) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx.$

102) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^p\, dx.$

103) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx, \quad \alpha>-1,\ \beta>-1.$

104) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

105) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, dx.$

106) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p}\, dx, \quad p>0.$

107) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

108) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5+2x^3}}\, dx.$

109) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\, dx.$

110) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x-\operatorname{arctg}\beta x}{x}\, dx.$

111) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x^n}}\, dx, \quad n\geqslant 0.$

112) $\displaystyle\int_0^{1/8} \frac{\arcsin(x^2+x^5)}{x\ln^2(1+x)}\, dx.$

113) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{|\pi^2-x^2|}\, dx.$

114) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left|\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right| dx.$

115) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

116) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi-x)^p}\, dx.$

117) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}.$

118) $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{x^{\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\ln x}\right| dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

119) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}|\ln x|\, dx.$

120) $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx.$

121) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}.$

122) $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx.$

123) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}.$

124) $\displaystyle\int_{100}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x|\ln\ln x|^\alpha}.$

125) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\ln x|^\alpha}.$

126) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1,1}}\, dx.$

127) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{|\ln x|^p}\, dx.$

128) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

129) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}}\,dx.$ 130) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,dx.$

131) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$ 132) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|}{x^p}\,dx.$

133) $\int\limits_0^{\pi} |\ln\sin x|\,dx.$ 134) $\int\limits_1^{+\infty} \left|\ln\cos\frac{1}{x}\right|\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\,dx.$

135) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\ln\sin x|}{\sqrt{x(\pi-2x)^5}}\,dx.$ 136) $\int\limits_0^{\pi} \frac{|\ln\sin x|}{x}\,dx.$

137) $\int\limits_0^{\pi} \frac{|\ln x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$ 138) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2}\,dx.$

139) $\int\limits_0^{\pi/2} |\ln|\sin^2\varphi-k^2||\,d\varphi, \quad |k|<1.$

140) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx.$ 141) $\int\limits_0^{1/3} \frac{\ln^\alpha\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^\beta x}\,dx.$

142) $\int\limits_1^{+\infty} x^k\cdot\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx.$ 143) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}.$

144) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1-\cos x}.$ 145) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sin x}\,dx.$

146) $\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}\,dx.$ 147) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\,dx.$

148) $\int\limits_1^{+\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\,dx.$ 149) $\int\limits_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\,dx.$

150) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

151) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x\ln^2 x}\,dx.$

152) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4+4x^3}\right)\,dx.$

153) $\int\limits_0^{+\infty} (\ln(x^2+1)-2\ln x)\,dx.$

154) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x-x)}{x^\alpha}\,dx.$ 155) $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}}-e^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\right)\,dx.$

156) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha+1}-\sqrt[3]{|x^\alpha-1|}}{\sqrt{x}}\,dx.$

157) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^6\sin^2 x}\,dx.$ 158) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}.$

159) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}.$ 160) $\int\limits_0^{+\infty} \sin^2\left(\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\,dx.$

161) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\,dx.$ 162) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}\,dx.$

163) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{(e^{x^2}+3)^{\frac{1}{x}}}\,dx.$ 164) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2\sqrt{x^2+1}}}\,dx.$

165) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}.$ 166) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{100}+1}{(1+\frac{1}{x})^{x\sqrt{x}}}\,dx.$

Исследовать сходимость (абсолютную и условную) интеграла.

167) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}\,dx.$

168) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,dx, \quad a>0.$

169) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx.$

170) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx.$

171) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^\alpha}\,dx, \quad \alpha \geqslant 0.$

172) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx.$

173) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+x}}\,dx.$

174) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^a}\sin x\,dx.$

175) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,dx.$

176) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x\,dx}{1+x^q}, \quad q\geqslant 0.$

177) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+10}\,dx.$

178) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x)>0$ при $x\geqslant 0$.

179) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p\cos x}{1+x^q}\,dx, \quad q\geqslant 0.$

180) $\displaystyle\int_{100}^{+\infty} (\ln x)^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx.$

181) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\sin x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\,dx.$

182) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx.$

183) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{\sin 3x}{x^\alpha}\,dx.$

184) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x\sin x}{x(e^x+1)}\,dx.$

185) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

186) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^p}\,dx.$

187) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$

188) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^3)\,dx.$

189) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx.$

190) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x(1-x)^p}\,dx.$

191) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(\sec x)\,dx.$

192) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)\,dx.$

193) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (e^x+x)\sin e^{2x}\,dx.$

194) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha\sin e^x\,dx.$

195) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x+x^3)\,dx.$

196) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{\alpha^2+x}\,dx.$

197) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}\,dx.$

198) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x+x^2)}{x^p}\,dx.$

199) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx.$

200) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x^3-x)\,dx.$

201) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin|\ln x|^q\cdot\frac{dx}{x}, \quad q>0.$

202) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{x^2+\sin x}}\,dx.$

203) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\,dx.$

204) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x+\sin x}\,dx.$

205) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2+\sin x)\,dx.$

206) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^3+\sin 2x)\,dx.$

207) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx.$

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов.

208) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx,\ f(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ x\in[n-1;n],\ n\in\mathbb{N}.$

209) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx.$

210) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^\alpha}\,dx.$

211) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{(-1)^{[\frac{1}{x}]}}{x}\,dx.$

212) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}(\sin(\sin x))}{x}\,dx.$

213) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta|\sin x|},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

214) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta\sin^2 x},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

215) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{[\frac{x}{\pi}]} x}{1+\ln^2(x+1)}\,dx.$

216) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^{[\frac{x}{\pi}]^2} x}{1+\ln^2(x+1)}\,dx.$

Установить, собственным или несобственным является интеграл, и, если он несобственный, то исследовать его сходимость.

217) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)\,dx.$

218) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}-\operatorname{arcctg} x\right)\,dx.$

219) $\displaystyle\int\limits_0^{a} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\sin(x-a)}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\pi x}{a}}\,dx,\quad a\neq 0.$

220) $\displaystyle\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{x-5}{x+5}\,dx.$

221) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x\sin^\alpha x}\,dx.$

222) $\displaystyle\int\limits_0^{1/3} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}\,dx.$

223) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3-2}{(x^2+1)^2}\left(3^{\frac{x}{2x^2+1}}-1\right)\,dx.$

224) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x\ln\ln\frac{1}{x}\,dx.$

225) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\,dx.$

226) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e^{-\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}\,dx.$

227) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}\,dx.$

228) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-e^{-\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}-\sin x^{2/3}}\,dx.$

229) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{tg}\pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^4\ln^4 x}\,dx.$

230) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{tg}\pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^4\ln^3 x}\,dx.$

231) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{tg}\pi x-(1-6x^2+4x^3)\sin\pi x}{x^3\ln^3 x}\,dx.$

232) $\displaystyle\int\limits_0^{5} \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{11}+11x^{19}}}\,dx.$

233) $\displaystyle\int\limits_0^{5} \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{13}+11x^{19}}}\,dx.$

234) $\displaystyle\int_0^5 \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{10}+11x^{19}}}\,dx.$

235) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{11}+11x^{19}}}\,dx.$

236) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{7/3}x}\,dx.$

237) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{7/3}x}\,dx.$

238) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{10/3}x}\,dx.$

239) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2}-e)\ln^{2}x}\,dx.$

240) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{13}+x^{15}}}\,dx.$

241) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{13}+x^{15}}}\,dx.$

242) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{12}+x^{13}}}\,dx.$

243) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+3x+3x^2)^2+3(x-1)^2-3)\sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^{12}+x^{13}}}\,dx.$

244) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5}-e^x}{\ln(1+x^2)}\,dx.$ 245) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5}-e^x}{\ln^{3/2}(1+x^2)}\,dx.$

246) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5}-e^x}{\ln^{4/3}(1+x^2)}\,dx.$

Доказать справедливость неравенств.

247) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$ 248) $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx\right| < \frac{\pi}{2}.$

249) $\displaystyle 0 < \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\pi}.$ 250) $\displaystyle 0 < \int_{100\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\pi}.$

251) $\displaystyle 0 < \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x\sqrt{x}}\,dx < 2\pi + 2\sqrt{2} - 2.$

252) $\displaystyle 0 < \int_{100\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{50\pi}.$ 253) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx > 0.$

254) $\displaystyle 0 < \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{2x^4+x+2} < \frac{1}{5}.$ 255) $\displaystyle \frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{3}{5},\ n \in \mathbb{N}.$

256) $\displaystyle \frac{1}{19} < \int_1^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}.$

257) $\displaystyle \frac{20}{19} < \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} < \frac{20}{19} + \frac{1}{20}.$

258) $\displaystyle 1 - \frac{1}{n} < \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx < 1 + \frac{1}{n}, \quad n > 1.$

259) $\displaystyle 0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx < \frac{1}{n}.$ 260) $\displaystyle 0 < \int_2^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{4e^4}.$

261) $\displaystyle\int\limits_{1,9}^{2} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}} < 0{,}03.$ 262) $\displaystyle 0 < \int\limits_{3}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

263) $\displaystyle\left|\int\limits_{2}^{+\infty} e^{-x^4}\cos x^4\,dx\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{21}.$

264) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} > \frac{1}{100}.$

265) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^\beta\pi^\beta}} \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta\sin^2 x} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^\beta\pi^\beta}}$

$\beta > 2(\alpha+1).$

266) $\displaystyle 0 \leqslant \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sin\pi x}{x}\,dx < 0{,}01.$ 267) $\displaystyle\int\limits_{100}^{+\infty} \sin\pi x^2\,dx < 0{,}01.$

Вычислить.

268) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha > 1.$

269) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-1}}, \quad 0 < \alpha < 1.$

270) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha > 0.$

271) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2-1}}, \quad \alpha > 0.$

272) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2+1}}, \quad \alpha > 0.$

Применяя формулу интегрирования по частям, получить рекуррентную формулу для интеграла I_n, $n \in \mathbb{N}$, и найти его значение.

273) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}x^n\,dx.$ 274) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n}\,dx.$

275) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin^n x\,dx, \quad \alpha > 0.$

276) $\displaystyle I_n(m) = \int\limits_{0}^{1} x^n\ln^m x\,dx, \quad m \in \mathbb{N}.$

277) $\displaystyle I_n(m) = \int\limits_{0}^{1} x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx, \quad m \in \mathbb{N}.$

278) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\sin x\,dx.$ 279) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\cos x\,dx.$

280) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx.$

281) $\displaystyle I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}, \quad AC-B^2 > 0.$

282) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx.$

283) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\,dx, \quad \alpha > 0.$

284) $\displaystyle I_n = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\,dx, \quad \alpha > 0.$

285) $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 286) $I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx.$

287) $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 288) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$

289) $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\ldots(n+x)}.$

290) Доказать, что существует $M > 0$, такое, что при $a > M$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x+a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1\cdot 2}{a^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{a^4} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\cdot\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Доказать равенства.

291) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

292) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

293) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$

294) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$

295) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

296) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx.$

297) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$

298) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx.$

299) $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$

300) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4}\,dx = 0.$ 301) $\int\limits_{-1}^1 \cos x\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}\,dx = 0.$

302) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1+x} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

303) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -2\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$

Используя разложение подынтегральной функции в ряд и равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

вычислить следующие интегралы.

304) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ 305) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx.$

306) $\int\limits_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx.$ 307) $\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx.$

308) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1}$.

309) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x + 1}$.

310) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{ax} - e^{-ax}}$.

311) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1 + x}\,dx$.

312) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1 - x}\,dx$.

313) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1 - x^2}\,dx$.

314) $\int\limits_0^{1} \frac{x \ln x\,dx}{1 - x^2}$.

315) $\int\limits_0^{1} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \cdot \frac{dx}{x}$.

316) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln^2 \operatorname{tg} x\,dx$.

317) $\int\limits_0^{1} \ln x \cdot \ln(1 - x)\,dx$.

Вычислить.

318) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^{3/2}}\,dx$.

319) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln|\sin^2\varphi - a^2|\,d\varphi, \quad a^2 \leqslant 1$.

320) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$.

321) $\int\limits_0^{1} \sqrt{1 - x^2} \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|\,dx$.

322) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$.

323) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}\,dx$.

324) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

325) $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,dx$.

326) $\int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos\varphi)}}\,dx$.

327) $\int\limits_0^{\varphi} \frac{\cos\frac{3}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos\varphi)}}\,dx$.

328) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \ln x}{1 + x^{2m+2}}\,dx, \quad m > -1$.

329) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$.

330) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx$.

331) $\int\limits_0^{\pi} x \ln\sin x\,dx$.

332) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

333) $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$.

334) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$.

335) $\int\limits_0^{1} \frac{(1 - x^2)\ln x\,dx}{(1 + x^2)^2}$.

336) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x\,dx}{1 - x^2}$.

337) $\int\limits_0^{1} \frac{x \ln x\,dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$.

338) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

339) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\pi - 2x}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}\,dx$.

340) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos x}{\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

341) $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x \cdot \cos nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

342) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx$.

343) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2} - e^{-\beta^2 x^2}}{x^2}\,dx$.

344) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) - \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2}\,dx$.

345) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx.$ 346) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx.$

347) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^{2\mu+1}}\,dx, \quad n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\mu + 1.$

348) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} px}{x}\,dx,\ p > 0.$ 349) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx.$

350) Доказать теорему Фруллани:

а) если существует $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ и для любого $a > 0$ имеем $\dfrac{f(x)}{x} \in \widetilde{R}\langle a, +\infty\rangle$, то $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ сходится для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и равен $f(0+)\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$;

б) если существует $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$ и для любо $a > 0$ имеем $\dfrac{f(x)}{x} \in \widetilde{R}\langle 0, a\rangle$, то $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ сходится для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и равен $A\cdot\ln\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Используя теорему Фруллани, вычислить интегралы.

351) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

352) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{p + qe^{-\alpha x}}{p + qe^{-\beta x}}\cdot\frac{dx}{x}, \quad p > 0,\ q > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

353) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x - \operatorname{arctg}\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

354) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

355) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}.$

356) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} + x(\alpha - \beta)e^{-\beta x}}{x^2}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

357) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

358) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x - \alpha\sin x}{x^2}\,dx.$ 359) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha x\cos x - \sin\alpha x}{x^2}\,dx.$

360) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

361) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

362) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\ln x}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

363) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\beta\sin\alpha x - \alpha\sin\beta x}{x^2}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

364) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\beta\ln(1 + \alpha x) - \alpha\ln(1 + \beta x)}{x^2}\,dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

365) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)^2\frac{dx}{x^2}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

366) Доказать формулу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_2 x + \cdots + A_n \cos \alpha_n x}{x}\, dx =$$

$$= -(A_1 \ln \alpha_1 + A_2 \ln \alpha_2 + \cdots + A_n \ln \alpha_n),$$

$$\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0$$

Вычислить.

367) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \alpha x - \sin^{2n} \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

368) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n+1} \alpha x - \cos^{2n+1} \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

369) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} \alpha x - \cos^{2n} \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

370) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

371) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x}{x}\, dx,$

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha = \max(\alpha, \beta, \gamma)$$

372) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

373) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin a x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x}\, dx,$

$$a > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ a > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

374) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin \alpha x - \sin \beta x)^2 \frac{dx}{x^2}.$

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Исследовать равномерную сходимость относительно множества X семейства функций $f(x, y)$ при $y \to y_0$.

375) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad X = [-1; 1], \quad y \to 0.$

376) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (0; +\infty), \quad y \to +\infty.$

377) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \to 0+.$

378) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \to +\infty.$

379) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; A), \quad y \to 0+.$

380) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \to +\infty.$

381) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (0; +\infty), \quad y \to 0+.$

382) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; A), \quad y \to +\infty.$

383) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \to 0+.$

384) $f(x, y) = \ln(1 - y^2 \cos x), \quad X = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \quad y \to 0.$

385) $f(x, y) = \ln(1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x), \quad X = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \quad y \to 0.$

386) $f(x, y) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{y^2} \sin^2 x\right), \quad X = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \quad y \to +\infty.$

387) $f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2), \quad X = (0; 1),$
а) $y \to 0$; б) $y \to 1$.

388) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln(x^2 + y^2)}, \quad X = (1; 2), \quad y \to +\infty.$

389) $f(x, y) = \dfrac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y + 1}, \quad X = (0; +\infty),$
а) $y \to 0+$; б) $y \to +\infty$.