ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор: Чурин Юрий Васильевич

Математико-механический факультет СПбГУ
Отделение математики

2002 - 2003 учебный год

Основная литература:

1) Понтягин А.С. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", М-ва, Наука 1974 г.

2) Бибиков "Курс обыкновенных дифференциальных уравнений", М-ва, Высш.школа 1991 г.

Дополнительная литература:

1) Хартман Ф. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", М-ва, Наука 1970 г.

2) Арнольд В.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", М-ва, Наука 1984 г.

Задачник:

1) Филиппов А.Ф. "Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям"

Часть I. Скалярные дифференциальные уравнения

Глава I. Введение

§1. Основные понятия

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обыкновенным дифференциальным уравнением с независимой переменной t и неизвестным y порядка n называется следующее соотношение

$$g(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = h(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \tag{1}$$

где g и h скалярные функции.

Замечание. Независимая переменная t всегда вещественная, а неизвестное y может быть и комплексным. В записи уравнения t при y обычно опускают. Производная $y^{(n)}$ называется старшей производной. Неизвестная и все ее производные кроме старшей называются фазовыми переменными.

Пример. $y'' + y = \sin t$ есть дифференциальное уравнение порядка 2 (второго порядка).

Определение. Решением уравнения (1) называется скалярная функция

$$y = \varphi(t) \quad t \in I \subset \mathbb{R},\ \text{где } I\text{– промежуток} \tag{2}$$

имеющая на этом промежутке все производные до порядка n включительно и такая, что

$$\forall\, t \in I \quad g(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) = h(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t))$$

Пример. Гармонический осциллятор: $y'' + \omega^2 y = 0$ $(\omega > 0)$. Для этого уравнения решениями являются, например, $y = 0$, $y = \cos\omega t$, $y = \sin\omega t$.

Замечание. Любое сужение решения уравнения (1) является решением.

Определение. Решение уравнения (1), не являющееся сужением другого его решения, называется максимально продолженным или непродолжимым, в противном случае продолжимым.

Теорема. *(о существовании максимального продолжения)*
Любое продолжимое решение – сужение некоторого максимально продолженного.

Доказательство. Идея: сужение определяет частичный порядок на множестве решений и утверждение теоремы следует из леммы Цорна. □

Таким образом, нахождение максимально продолженных решений есть на самом деле нахождение всех решений.

Пример. Для гармонического осциллятора все решения (непродолжимые) – это

$$y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,\ t \in \mathbb{R},\ \text{иначе: } y = A\sin(\omega t + \varphi),\ A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

где A – амплитуда колебаний, ω – частота, φ – начальная фаза.

Различают некоторые частные виды уравнения (1):

1) Уравнение (1) называется линейным над промежутком J, если g и h являются линейными функциями относительно неизвестной и всех производных. Если линейное уравнение над промежутком J имеет решение $y = 0$, то оно называется однородным линейным.

2) Уравнение (1) называется автономным, если g и h явно не зависят от независимой переменной.

§ 2. Задача Коши. Свойство единственности

$$g(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = h(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) \tag{1}$$

Задача Коши: Фиксируется начальное значение независимой переменной (начальный момент) t_0, фиксируется n чисел $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ – начальные значения фазовых переменных и записывается условие – начальное условие задачи Коши

$$(y, y', \dots, y^{(n-1)})_{t=t_0} = (a_0, \dots, a_{n-1}) \tag{2}$$

Точка $(t_0, a_0, \dots, a_{n-1})$ – начальная точка задачи Коши. Решить задачу Коши – значит найти такое решение $y = \varphi(t),\ t \in I$, что

1) φ определено при $t = t_0$.

2) $\varphi(t_0) = a_0,\ \varphi'(t_0) = a_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}$.

Говорят, что уравнение (1) обладает свойством единственности, если оно не имеет двух различных решений, заданных на одном промежутке и являющихся решениями одной задачи Коши.

Пример.

$$y'' = 3\sqrt[3]{(y')^2} \quad (y, y')_{t=0} = (0, 0)$$

Ясно, что $y = 0,\ t \in \mathbb{R}$ – решение. Одновременно с этим при любом положительном t_0 $y = \frac{(t-t_0)^4}{4},\ t \in \mathbb{R}$ является решением той же задачи Коши. Это уравнение не обладает свойством единственности.

Замечание. Уравнение (1) обладает свойством единственности тогда и только тогда, когда любая задача Коши имеет не более одного максимально продолженного решения.

§ 3. Уравнения, разрешенные относительно старшей производной

$$g(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = h(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) \tag{1}$$

Если уравнение (1) имеет вид

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

то его называют уравнением, разрешенным относительно старшей производной. $G = dom f$, содержащееся в пространстве переменных $t, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, называется областью задания уравнения (2).

Замечание. В постановке задачи Коши начальную точку всегда выбирают в области задания уравнения.

Некоторые типы уравнений первого порядка:

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G = I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

1) Линейное уравнение – ЛУ: $y' = p(t)y + q(t),\ (t, y) \in I \times \mathbb{R}$.

2) Однородное линейное уравнение – ОЛУ: $y' = p(t)y,\ (t, y) \in I \times \mathbb{R}$.

3) Простейшее: $y' = q(t),\ (t, y) \in I \times \mathbb{R}$, тогда, если q непрерывна на I, то

$$y = \int q(t)dt + C$$

Упражнение. Доказать, что $y = Ce^{\int p(t)dt}$ $t \in I$ – множество всех решений однородного линейного уравнения.

Упражнение. Если в уравнении $y' = p(t)y + q(t)$ функции p и q непрерывны на I, то любая задача Коши имеет единственное решение на I.

4) Уравнение с разделяющимися переменными: $y' = g(t)h(y),\ (t, y) \in I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Упражнение. Если g и h непрерывны и h в ноль не обращается, то уравнение обладает свойством единственности. Если начальная точка лежит в G, то решение существует.

Глава II. Линейные уравнения

Введем обозначение, которое будем далее всюду использовать, через Y обозначим $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, если не оговорено противное. Рассматриваемые утверждения и доказательства будут верны как для случая $Y = \mathbb{R}$, так и для $Y = \mathbb{C}$.

Рассмотрим линейное уравнение порядка n, которое будем кратко обозначать ЛУ$_n$

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)y = q(t) \quad p_1, \ldots, p_n, q : I \to Y$$

Теорема. *(Существования и единственности для ЛУ)(Будет доказана позже)*
Если $p_1, \ldots, p_n, q \in C(I)$, то любая задача Коши с начальной точкой из $I \times Y^n$ имеет единственное решение на I и любое другое решение есть его сужение.

Замечание. Для линейных уравнений выполнено и следующее: все максимально продолженные решения заданы на всем I. Это, вообще говоря, не выполняется для нелинейных уравнений.

Обозначим через $\mathcal{Y}_q$ множество решений линейного уравнения, заданных на I. Будем считать, что $p_1, \ldots, p_n, q \in C(I)$. Заметим, что $\mathcal{Y}_q \subset C^{(n)}(I)$, но вообще говоря подпространством в $C^{(n)}(I)$ не является.

§ 1. Однородные линейные уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n, которое будем кратко обозначать ОЛУ$_n$

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \quad p_1, \ldots, p_n \in C(I) \tag{1}$$

Через $\mathcal{Y}_0$ обозначим множество всех его решений, заданных на I.

1°. Структура множества максимально продолженных решений ОЛУ$_n$

Лемма. *$\mathcal{Y}_0$ является линейным подпространством в $C^{(n)}(I, Y)$*

Доказательство. Прямая подстановка показывает, что сумма решений есть решение и произведение решения на скаляр – решение. $\square$

Зафиксируем $t_0 \in I$ и рассмотрим отображение $l_{t_0} : \mathcal{Y}_0 \to Y^n$

$$l_{t_0}(\varphi) = (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) \in Y^n$$

Лемма. *l_{t_0} – изоморфизм.*

Доказательство. l_{t_0} – линейное по линейности производной.

$$l_{t_0}(\alpha\varphi) = \alpha(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) = \alpha l_{t_0}(\varphi)$$

$$l_{t_0}(\varphi_1 + \varphi_2) = \ldots = l_{t_0}(\varphi_1) + l_{t_0}(\varphi_2)$$

Взяв $(a_1, \ldots, a_n) \in Y^n$, рассмотрим соответствующую этому набору задачу Коши с начальным моментом t_0 и её решение $\varphi \in \mathcal{Y}_0$, получим $l_{t_0}(\varphi) = (a_1, \ldots, a_n)$, значит, l_{t_0} сюръективно. Инъективность следует из того, что имеет место единственность решения. $\square$

Теорема. *$\mathcal{Y}_0$ является линейным пространством размерности n над полем Y.*

Доказательство. Утверждение следует из предшествующих лемм. $\square$

Определение. Базис в $\mathcal{Y}_0$ называется фундаментальным семейством решений (ФСР) уравнения (1).

Ясно, что если $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ – ФСР, то $\{y = C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n \mid C_1, \ldots, C_n \in Y\}$ – множество всех решений.

Пример. Для уравнения $y'' + \omega^2 y = 0,\ t \in \mathbb{R}$ ФСР есть набор из двух линейно независимых решений. Такими решениями являются $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, а значит любое решение y запишется в виде $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

2°. Лемма о частичном овеществлении ФСР

В этом пункте считаем $Y = \mathbb{C}$.

Лемма. *Если в ФСР уравнения (1) имеется два комплексно сопряженных решения φ и $\overline{\varphi}$, то замена их на $Re\varphi$ и $Im\varphi$ оставляет семейство решений фундаментальным.*

Доказательство.

$$Re\varphi = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2} \quad Im\varphi = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i}$$

Так как $\mathcal{Y}_0$ – линейное пространство, то $Re\varphi$ и $Im\varphi$ – решения. При этом не изменится количество решений и семейство останется линейно независимым. □

§ 2. Автономные ОЛУ$_n$

Рассмотрим автономное однородное линейное уравнение порядка n, которое будем кратко обозначать АОЛУ$_n$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \quad a_1, \ldots, a_n \in Y \tag{1}$$

$\mathcal{Y}_0$ – множество всех его решений, заданных на $\mathbb{R}$.

1°. Характеристический многочлен АОЛУ$_n$

Попробуем найти решение в виде $y = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$, подставим в уравнение: $e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) \equiv 0$. Многочлен $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ называют **характеристическим многочленом**. В таких обозначениях $e^{\lambda t}$ – решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(\lambda) = 0$. Соответственно, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – простые корни характеристического многочлена, то $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$, $t \in \mathbb{R}$ – решения. В случае уравнения с вещественными коэффициентами комплексные корни входят парами сопряженных и применима лемма о частичном овеществлении ФСР.

2°. Линейная независимость квазиодночленов

Определение. Выражение вида $e^{\alpha t}Q(t)$, где $Q(t)$ – ненулевой многочлен называется **квазимногочленом**. Степень Q называется **порядком** квазимногочлена, α – **степенью**.

Заметим, что производная квазимногочлена есть квазимногочлен. Действительно,

$$(e^{\alpha t}Q(t))' = e^{\alpha t}(\alpha Q(t) + Q'(t))$$

степень квазимногочлена сохраняется и при $\alpha \neq 0$ порядок квазимногочлена сохраняется. Если проинтегрировать квазимногочлен ненулевой степени также получим квазимногочлен той же степени и порядка, что и подынтегральный. Последнее утверждение несложно доказать применяя метод математической индукции и используя интегрирование по частям. Это упражнение предоставляется читателя.

Лемма. *Любая конечная сумма квазимногочленов с различными степенями не может быть тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$*

Доказательство. Индукция по m – числу квазимногочленов в сумме. База $m = 1$ очевидна. Пусть утверждение леммы верно для сумм m квазимногочленов и не верно для суммы $m+1$ квазимногочлена.

$$\sum_{j=1}^{m+1} e^{\alpha_j t}Q_j(t) \equiv 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha_j t}Q_j(t) + e^{\alpha_{m+1}t}Q_{m+1}(t) \equiv 0 \quad | : e^{\alpha_{m+1}t}$$

$$\sum_{j=1}^{m} e^{\beta_j t}Q_j(t) + Q_{m+1}(t) \equiv 0, \quad \text{где } \beta_j = \alpha_j - \alpha_{m+1}, \text{ все } \beta_j \text{ различны и } \beta_j \neq 0$$

Дифференцируя последнее равенство k раз, добьемся $Q^k_{m+1} = 0$, тогда

$$\sum_{j=1}^{m} e^{\beta_j t} R_j(t) \equiv 0$$

Получили сумму квазимногочленов с m слагаемыми равную нулю, что противоречит предположению индукции. $\square$

Теорема. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различны. Тогда набор функций*

$$\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ldots, t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}\}$$

линейно независим над $\mathbb{R}$

Доказательство. Пусть

$$\sum_{j=1}^{m}(c_{j1}e^{\lambda_j t} + \ldots + c_{jk_j}t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}) \equiv 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t}Q_j(t) \equiv 0, \text{где } Q_j(t) \text{ – многочлен}$$

По предыдущей лемме получаем, что все $Q_j(t) \equiv 0$, а значит равны нулю все коэффициенты многочленов. Они же являются и коэффициентами линейной комбинации. $\square$

§ 3. Теорема Эйлера

$L(t^k e^{\lambda t})$ – функция, которая получается после подстановки $t^k e^{\lambda t}$ в левую часть уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{1}$$

Лемма.

$$L(t^k e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{k} C^i_k \mathcal{P}^{(i)}(\lambda)t^{k-i}$$

Доказательство. Будем $e^{\lambda t}$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ рассматривать как функцию двух переменных.

$$\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}e^{\lambda t} = t^i e^{\lambda t}$$

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda t}\mathcal{P}(\lambda))$$

Второе равенство в цепочке верно, так как дифференцирование по t и по λ перестановочны. Далее по формуле Лейбница дифференцирования произведения получаем требуемое. $\square$

Теорема. *(Теорема Эйлера)*
Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – всевозможные попарно различные корни $\mathcal{P}(\lambda)$ уравнения (1) и пусть $k_1, \ldots, k_m$ их кратности. Тогда семейство функций

$$\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{k_j-1}e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{m}$$

является ФСР.

Доказательство. $k_1 + \ldots + k_m = n$, следовательно множество содержит ровно n функций. По теореме предыдущего пункта они линейно независимы. И по предыдущей лемме

$$L(t^k e^{\lambda_j t}) = e^{\lambda_j t}\sum_{i=0}^{k} C^i_k \mathcal{P}^{(i)}(\lambda_j)t^{k-i}, \quad k \in \{0, \ldots, k_j - 1\}$$

Но $\mathcal{P}^{(i)}(\lambda_j) = 0$, тогда $L(t^k e^{\lambda_j t}) = 0$. $\square$

§ 4. Неоднородные линейные уравнения

1°. Структура пространства решений и метод вариации произвольных постоянных

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)y = q(t) \quad p_1, \ldots, p_n, q \in C(I, Y) \tag{1}$$

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)y = 0 \text{ – ОЛУ}_n\text{, соответствующее (1)} \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* $\psi \in \mathcal{Y}_q$, *тогда* $\mathcal{Y}_q = \psi + \mathcal{Y}_0 = \{\psi + \varphi \mid \varphi \in \mathcal{Y}_0\}$

Доказательство.

$$\theta \in \psi + \mathcal{Y}_0 \Rightarrow \theta = \psi + \varphi,\ \varphi \in \mathcal{Y}_0 \Rightarrow L(\theta) = L(\psi + \varphi) = L(\psi) + L(\varphi) = q + 0 \Rightarrow \theta \in \mathcal{Y}_q$$

$$\xi \in \mathcal{Y}_q \Rightarrow L(\xi) = L(\psi + (\xi - \psi)) = L(\psi) + L(\xi) - L(\psi) = q + q - q = q \Rightarrow \xi \in \psi + \mathcal{Y}_0$$

$\square$

Пример. $y'' + y = 2e^{-t}$, берем решение $\psi = e^{-t}$ и учитывая, что $\cos t$, $\sin t$ есть ФСР соответствующего однородного линейного уравнения, получаем $y = e^{-t} + C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ – задает все решения данного уравнения.

Теорема. *(Метод вариации произвольных постоянных)*
Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *есть ФСР уравнения (2). Тогда функция*

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)\varphi_j(t),\ t \in I \tag{3}$$

является решением (1), если $C_j(t)$ *дифференцируемы на* I *и* $C_j'(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j \equiv 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j' \equiv 0 \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-2)} \equiv 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-1)} \equiv q \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство.

$$\begin{array}{lrll} & p_n\cdot| & y = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\varphi_j & \Rightarrow \text{существует } y' \\ & p_{n-1}\cdot| & y' = \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j}_{0} + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\varphi_j' & \Rightarrow \text{существует } y'' \\ + & \cdots| & \cdots & \\ & p_1\cdot| & y^{(n-1)} = \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-2)}}_{0} + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n-1)} & \Rightarrow \text{существует } y^{(n)} \\ & p_o\cdot| & y^{(n)} = \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n} C_j'\varphi_j^{(n-1)}}_{q} + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\varphi_j^{(n)} & \end{array}$$

Умножая первое уравнение на p_n, второе на p_{n-1}, …, n-ое на p_1, $n+1$-ое на 1 и складывая, получим

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = q + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j(\varphi_j^{(n)} + p_1 \varphi_j^{(n-1)} + \ldots + p_n \varphi_j)}_{0} = q$$

□

Остался один вопрос: а существуют ли C_j? На самом деле мы имеем линейную систему с невырожденной матрицей, а тогда пользуясь формулами Кронокера-Капелли получаем решения и они непрерывны, так как непрерывны элементы матрицы $\varphi_j^{(i)}$. Матрица этой системы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

называется **матрицей Вронского**. Ее определитель обозначается $W(t)$ и называется **вронскиан**.

Упражнение. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно зависимы, то $\forall\, t \in I \;\; W(t) = 0$

Упражнение. Если хотя бы в одной точке $W(t_0) = 0$, то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно зависимы.

Упражнение. (Формула Остроградского-Лиувилля)
Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{Y}_0$ уравнения (2), то имеет место формула

$$\forall\, t, t_0 \in I \quad W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(\tau) d\tau}$$

2°. Метод неопределенных коэффициентов

Применяется если уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{\alpha t} Q(t) \tag{5}$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \text{ -- ОЛУ}_n\text{, соответствующее (5)} \tag{6}$$

Теорема. *Если $\mathcal{P}(\alpha) \neq 0$, то уравнение (5) имеет решение вида $y = e^{\alpha t} R(t)$, где R – многочлен такой же степени, что и Q (нерезонансный случай). Если α есть корень $\mathcal{P}$ кратности $k \in \mathbb{N}$, то уравнение имеет решение вида $y = t^k e^{\alpha t} R(t)$, где R – многочлен такой же степени, что и Q (резонансный случай).*

Доказательство. Обозначим $m = \deg Q$, $Q(t) = q_0 t^m + \ldots + q_m$ $(q_0 \neq 0)$, $R(t) = r_0 t^m + \ldots + r_m$. Рассматриваем одновременно резонансный и нерезонансный случаи.

$$L(e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{m} t^{m-j+k} r_j) = e^{\alpha t}(q_0 t^m + \ldots + q_m)$$

С другой стороны

$$L(e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{m} t^{m-j+k} r_j) = \sum_{j=0}^{m} r_j L(e^{\alpha t} t^{m-j+k}) = e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{m} r_j \sum_{i=0}^{m-j+k} C_{m-j+k}^{i} \mathcal{P}^{(i)}(\alpha) t^{m-j+k-i}$$

То есть

$$e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{m} r_j \sum_{i=0}^{m-j+k} C_{m-j+k}^{i} \mathcal{P}^{(i)}(\alpha) t^{m-j+k-i} = e^{\alpha t}(q_0 t^m + \ldots + q_m)$$

Так как $\mathcal{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$, а все младшие производные равны нулю в точке α, то суммирование по i можно начинать с k.

$$\sum_{j=0}^{m} r_j \sum_{i=k}^{m-j+k} C_{m-j+k}^{i} \mathcal{P}^{(i)}(\alpha) t^{m-j+k-i} = q_0 t^m + \ldots + q_m$$

Тогда порядок квазимногочлена слева не превосходит m. И приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$r_0 C_{m+k}^{k} \mathcal{P}^{(k)}(\alpha) = q_0 \Rightarrow r_0 = \frac{q_0}{C_{m+k}^{k} \mathcal{P}^{(k)}(\alpha)} \neq 0$$

$$r_0 C_{m+k}^{k+1} \mathcal{P}^{(k+1)}(\alpha) + r_1 C_{m+k-1}^{k} \mathcal{P}^{(k)}(\alpha) = q_1$$

И так как $C_{m+k-1}^{k} \mathcal{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$, то из последнего соотношения находится r_1. Продолжая подобным образом и используя уже найденные r_j, определяем все r_j. $\square$

Пример. $y'' + 2y' - 3y = e^t(t^2 - 3)$
Для $y'' + 2y' - 3y = 0$ характеристический многочлен равен $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$, его корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. А значит решение следует искать в виде $y = te^t(r_0 t^2 + r_1 t + r_2)$.

$$\begin{array}{ccc} & -3\cdot| & y = e^t(r_0 t^3 + r_1 t^2 + r_2 t) \\ + & 2\cdot| & y' = e^t(r_0 t^3 + (r_1 + 3r_0)t^2 + (r_2 + 2r_1)t + r_2) \\ & 1\cdot| & y'' = e^t(r_0 t + (r_1 + 6r_0 t^2) + (r_2 + 4r_1 + 6r_0)t + (2r_2 + 2r_1)) \end{array}$$

После чего приравнивая сумму слева $e^t(t^2 - 3)$, сокращая e^t, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и решая систему линейных алгебраических уравнений, получаем

$$\begin{cases} r_0 = \frac{1}{12} \\ r_1 = -\frac{1}{16} \\ r_2 = -\frac{23}{32} \end{cases}$$

А значит

$$y = te^t(\frac{1}{12}t^2 - \frac{1}{16}t - \frac{23}{32})$$

есть частное решение уравнения $y'' + 2y' - 3y = e^t(t^2 - 3)$.

Часть II. Системы дифференциальных уравнений

Глава I. Введение

§ 1. Основные понятия

Зафиксируем $s, m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$.

Определение. Системой s дифференциальных уравнений с независимой переменной t и неизвестными $y_1, \ldots, y_m$ порядков $n_1, \ldots, n_m$ соответственно называется совокупность соотношений

$$g_j(t, \ldots, y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n_i)}, \ldots) = h_j(t, \ldots, y_i, y_i', \ldots, y_i^{(n_i)}, \ldots)$$

где $j = 1, \ldots, s$, а g_j и h_j – скалярные функции.

Начальные определения в случае систем дифференциальных уравнений во многом напоминают аналогичные определения для одиночного дифференциального уравнения. Решением будем называть упорядоченную совокупность функций, заданных на промежутке I и имеющих необходимые производные. При таком определении сужение решения также является решением. Решение называется продолжимым, если оно есть сужение другого решения, непродолжимым (максимально продолженным), если это не так. Справедлива теорема о существовании максимально продолженного решения. Неизвестные и все их производные называются также фазовыми переменными. Вводятся понятия линейных систем, однородных линейных систем, автономных систем.

Мы будем заниматься уравнениями, разрешенными относительно старшей производной.

$$y_j^{(n_j)} = f_i(t, \ldots, y_j, y_j', \ldots, y_j^{(n_j-1)}, \ldots) \quad j = 1, \ldots, m$$

$$G = \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i \subset \mathbb{R} \times Y_m^n \quad n = n_1 + \ldots + n_m$$

G называется областью задания системы. Для систем уравнений также ставят задачу Коши. Рассматривают $(t_0, \ldots, a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n_j}}, \ldots) \in \mathbb{R} \times Y^n$ и начальные условия записывают в виде

$$(y_j, y_j', \ldots, y_j^{(n_j-1)})_{t=t_0} = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n_j}}) \quad j = 1, \ldots, m$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Задача Коши для этой системы: $(x, y)_{t=0} = (1, 0) \quad (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.
И ее решение: $(x, y) = (\cos t, \sin t) \quad t \in \mathbb{R}$.

Начальную точку задачи Коши обычно выбирают в области задания G. Говорят, что выполнено свойство единственности, если не существует двух различных решений одной и той же задачи Коши, заданных на одном промежутке. Системы, не имеющие решений обладают свойством единственности. На практике имеет смысл рассматривать системы с непрерывными функциями f_i и областью задания, имеющей внутренние точки.

Частные случаи систем, разрешенных относительно старшей производной:

1) $m = 1$ (одна неизвестная) $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

2) $\forall j = 1, \ldots, m \quad n_j = 1, \quad m = n$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Система такого вида называется n-мерной нормальной системой.

Глава II. Нормальные системы. Общая теория

§ 1. Сведение систем общего вида к нормальной

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = -y + t + \dot{x} \\ \dot{y} = -xy \end{cases} \qquad (t, x, \dot{x}, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

Фазовые переменные здесь $(x, \dot{x}, y)$. Поставим задачу Коши: $(x, \dot{x}, y)_{t=1} = (0, 1, 0)$. Идея сведения системы общего вида к нормальной заключается в том, чтобы все фазовые переменные системы общего вида принять за новые неизвестные. Для этой системы переобозначения можно ввести таким образом $x \to x$, $\dot{x} \to v$, $y \to y$. В новых обозначениях система и задача Коши запишутся так:

$$\begin{cases} \dot{v} = -y + t + v \\ \dot{y} = -xy \\ \dot{x} = v \end{cases} \qquad (x, v, y)_{t=1} = (0, 1, 0)$$

Область задания системы не изменится. Строго говоря, эти системы не эквивалентны, но по решениям второй восстанавливаются решения первой. Крайне важно, что наследуются свойства существования и единственности.

В общем случае проводят похожее преобразование:

$$(y_j, y_j', \ldots, y_j^{(n_j-1)}) =: (z_{j_1}, \ldots, z_{j_{n_j}}), \quad j = 1, \ldots, m$$

Тогда в исходной системе проводят переобозначение и добавляют к ней уравнения:

$$\begin{cases} z_{j_1}' = z_{j_2} \\ \cdots \\ z_{j_{n_j-1}}' = z_{j_{n_j}} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m$$

При этом не меняются область задания, наличие или отсутствие свойств существования, единственности, автономности, линейности, однородности и т.д. Поэтому можно ограничиться рассмотрением нормальных систем.

§ 2. Векторная запись системы

Рассмотрим нормальную систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (t, y_1, \ldots, y_n) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n$$

В рассмотрение вводят вектора

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad (t, y) = (t, y_1, \ldots, y_n)$$

И отображение

$$f : G \to Y^n, \quad f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \cdots \\ f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

Тогда система записывается в виде

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \tag{1}$$

А задача Коши ставится как

$$(t_0, y_0) \in G \quad y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

§ 3. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Соотношение

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau \tag{3}$$

называется **интегральным уравнением, соответствующим задаче Коши (1),(2)**. **Решением** интегрального уравнения (3) называется непрерывная вектор-функция, заданная на промежутке $I \subset \mathbb{R},\ t_0 \in I$ и такая, что

$$\forall\, t \in I \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Теорема. *Пусть $f \in C(G)$. Тогда любое решение задачи Коши (1),(2) является решением (3) и наоборот.*

Доказательство. Рассмотрим $y = \varphi(t)$, $t \in I$ – решение задачи Коши (1),(2). Тогда интегрируя соотношение $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, получаем

$$\forall\, t \in I \quad \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Обратно: пусть $\varphi(t)$, $t \in I$ – решение интегрального уравнения

$$\forall\, t \in I \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Тогда, так как $f \in C(G)$, то

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \in C^1 \Rightarrow \varphi(t) \in C^1$$

При этом ясно, что $\varphi'(t) = f(\tau, \varphi(\tau))$ и $\varphi(t_0) = y_0$. □

Пример. Задаче Коши $y' = y$, $y|_{t=0} = 1$ соответствует интегральное уравнение

$$y(t) = 1 + \int_{0}^{t} y(\tau) d\tau$$

§ 4. Лемма Гронуолла

Лемма. *Пусть $u(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathbb{R}$ скалярная непрерывная функция, удовлетворяющая при некоторых $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и неотрицательных λ и μ неравенству*

$$\forall\, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad 0 \le u(t) \le \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|$$

Тогда имеет место неравенство

$$\forall\, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad u(t) \le \lambda e^{\mu |t - t_0|}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что утверждение верно на двух промежутках:
$\langle \alpha, t_0]$ и $[t_0, \beta \rangle$. Докажем для второго промежутка, аналогичное рассуждение применимо и к первому .

$$g(t) = \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|$$

И, так как $t > t_0$, а $u(t) \geq 0$, модуль можно снять

$$g(t) = \lambda + \mu \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

Поэтому, $g'(t) = \mu u(t)$, а так как $u(t) \leq g(t)$, то $g'(t) \leq \mu g(t)$, откуда $g'(t) - \mu g(t) \leq 0$. Домножая на $e^{-\mu t}$ получаем $e^{-\mu t} g'(t) - \mu e^{-\mu t} g(t) \leq 0$, то есть $(e^{-\mu t} g(t))' \leq 0$. Значит, $e^{-\mu t} g(t)$ убывает, откуда сразу следует, что

$$e^{-\mu t} g(t) \leq e^{-\mu t_0} g(t_0) \Rightarrow g(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \Rightarrow u(t) \leq g(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

□

§ 5. Условие Липшица и свойство единственности

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

1°. Связь между глобальным и локальным условиями Липшица

Определение. Пусть $G \subset \mathbb{R} \times Y^n$, $f : G \to Y^n$, $f \in C(G)$ и пусть $D \subset G$. Говорят, что функция $f(t, y)$ на D удовлетворяет условию Липшица по второй переменной, $f \in Lip_2(D)$, если существует $L \in \mathbb{R}$, такое что

$$\forall\, (t, \overline{y}), (t, \overline{\overline{y}}) \in D \quad \|f(t, \overline{y}) - f(t, \overline{\overline{y}})\| \leq L \|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\|$$

Определение. Говорят, что f удовлетворяет локальному условию Липшица по второй переменной на G, $f \in locLip_2(G)$, если каждая точка G имеет окрестность, в которой выполняется условие Липшица.

Теорема. *Если $f \in locLip_2(G)$, $D \subset G$, D – компакт, то $f \in Lip_2(D)$*

Доказательство. От противного.
Пусть существует $D \subset G$, D – компакт: $f \notin Lip_2(D)$. Выберем последовательность $L_k \to \infty$, тогда

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, (t_k, \overline{y}_k), (t_k, \overline{\overline{y}}_k) \in D : \ \|f((t_k, \overline{y}_k)) - f(t_k, \overline{\overline{y}}_k)\| > L_k \|\overline{y}_k - \overline{\overline{y}}_k\| \tag{3}$$

Так как при любом k t_k, $\overline{y}_k$ и $\overline{\overline{y}}_k$ содержатся в компакте G, то можно выбрать подпоследовательность индексов k так, что из последовательностей $\{t_k\}$, $\{\overline{y}_k\}$, $\{\overline{\overline{y}}_k\}$ выделим сходящиеся подпоследовательности. Тогда будем считать, что $(t_k, \overline{y}_k) \to (t_0, \overline{y}_0)$ и $(t_k, \overline{\overline{y}}_k) \to (t_0, \overline{\overline{y}}_0)$.

1) Если $\overline{y}_0 \neq \overline{\overline{y}}_0$, то переходя в (3) к пределу и учитывая, что f непрерывна, получаем противоречие: слева в неравенстве конечный предел, справа равный $+\infty$.

2) Случай $\overline{y}_0 = \overline{\overline{y}}_0 = y_0$. Так как $f \in locLip_2(G)$ и $(t_0, y_0) \in D \subset G$, то существует окрестность V точки (t_0, y_0) такая, что $f \in Lip_2(V \cap G)$, то есть

$$\exists\, L_0 \quad \forall\, (t, \overline{y}), (t, \overline{\overline{y}}) \in V \cap G \quad \|f(t, \overline{y}) - f(t, \overline{\overline{y}})\| \leq L_0 \|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\|$$

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N \quad (t_k, \overline{y}_k), (t_k, \overline{\overline{y}}_k) \in V \cap G,$$

Для таких точек выполнено локальное условие Липшица, что противоречит условию (3), которое для таких точек тоже выполнено.

□

2°. Теорема о единственности решения задачи Коши

Теорема. *Если в (1) $f(t,y) \in locLip_2(G)$, то система (1) обладает свойством единственности.*

Доказательство. От противного.
Пусть существуют $\overline{\varphi}(t), \overline{\overline{\varphi}}(t)$, $t \in I$ – решения задачи Коши (1)-(2) и существует $t_1 \in I$ такое, что $\overline{\varphi}(t_1) \neq \overline{\overline{\varphi}}(t_1)$. Обозначим через J отрезок с концами t_0, t_1 ($[t_0,t_1]$ или $[t_1,t_0]$). Тогда

$$\forall\, t \in J \quad \overline{\varphi}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{\varphi}(\tau))d\tau \quad \overline{\overline{\varphi}}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{\overline{\varphi}}(\tau))d\tau$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\forall\, t \in J \quad \overline{\varphi}(t) - \overline{\overline{\varphi}}(t) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \overline{\varphi}(\tau)) - f(\tau, \overline{\overline{\varphi}}(\tau)))d\tau$$

$$\left\|\overline{\varphi}(t) - \overline{\overline{\varphi}}(t)\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \overline{\varphi}(\tau)) - f(\tau, \overline{\overline{\varphi}}(\tau)))d\tau\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f(\tau, \overline{\varphi}(\tau)) - f(\tau, \overline{\overline{\varphi}}(\tau))\right\| d\tau\right|$$

$$D = \Gamma\overline{\varphi}|_J \cap \Gamma\overline{\overline{\varphi}}|_J \subset G,\ D \text{ – компакт} \Rightarrow f(t,y) \in Lip_2(D) \text{ с константой } L_0 > 0$$

Тогда

$$\forall\, t \in J \quad 0 \leq \left\|\overline{\varphi}(t) - \overline{\overline{\varphi}}(t)\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f(\tau, \overline{\varphi}(\tau)) - f(\tau, \overline{\overline{\varphi}}(\tau))\right\| d\tau\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|\overline{\varphi}(\tau) - \overline{\overline{\varphi}}(\tau)\right\| d\tau\right| L_0$$

Теперь, используя лемму Гронуолла, получаем, что при любом $t \in J$, $\left\|\overline{\varphi}(t) - \overline{\overline{\varphi}}(t)\right\| \leq 0$. Но при $t = t_1 \in J$ $\overline{\varphi}(t_1) \neq \overline{\overline{\varphi}}(t_1)$. □

Замечание. На практике проверять локальное условие Липшица тяжело и эта проверка используется лишь в тонких вопросах. Вместо этого проверяют непрерывность функции, непрерывную дифференцируемость по второй переменной и далее пользуются тем, что выполнение этих двух условий влечет локальное условие Липшица.

§ 6. Теорема Пикара

$$y' = f(t,y) \quad (t,y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t,y) \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Определение. Пусть $t_0 \in J \subset \mathbb{R}$, J – промежуток. Нулевым приближением Пикара задачи Коши (1),(2) называется

$$y^0(t) \equiv y_0 \quad t \in J \tag{3_0}$$

Если $\Gamma y^0 \subset G$, то первым приближением Пикара называется

$$y^1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^0(\tau))d\tau \quad t \in J \tag{3_1}$$

Аналогично, если $\Gamma y^{k-1} \subset G$, то k-ым приближением Пикара называется

$$y^k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{k-1}(\tau))d\tau \quad t \in J \tag{3_k}$$

Упражнение. Построить приближения Пикара для задачи Коши $y' = y$, $y|_{t=0} = 1$.

Теорема. *(Теорема Пикара)*
Пусть все последовательные приближения Пикара $\{y^k(t)\}$ задачи Коши (1)-(2) определены на отрезке $J \subset \mathbb{R}$, существует замкнутое множество $K \subset G : \Gamma y^k \subset K$ и $f(t,y) \in Lip_2(K)$. Тогда существует функция $\varphi(t)$, $t \in J$ являющаяся решением задачи Коши (1)-(2) и $y^k(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на J.

Доказательство. Рассмотрим ряд $y^0(t)+(y^1(t)-y^0(t))+(y^2(t)-y^1(t))+\ldots$. Частичные суммы этого ряда равны $y^k(t)$. Докажем что этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом, а значит сходится равномерно.

$$\left\|y^1(t)-y^0(t)\right\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(\tau,y_0)\|\,d\tau\right| \leq M\,|t-t_0|\,,\text{ где } M=\sup_{\tau\in J}\|f(\tau,y_0)\| \tag{4}$$

Докажем, что

$$\forall\, k\in\mathbb{N}\quad \left\|y^k(t)-y^{k-1}(t)\right\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\,|t-t_0|)^k}{k!} \tag{4_k}$$

Здесь $L>0$ – константа Липшица функции f на J. Проведем индукцию по k.
База: При $k=1$ из (4_k) получаем уже доказанное утверждение (4).
Переход (4_k)⇒(4_{k+1}):

$$\begin{aligned}\left\|y^{k+1}(t)-y^k(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,y^k(\tau))-f(\tau,y^{k-1}(\tau)))d\tau\right\| \leq \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t}\left\|f(\tau,y^k(\tau))-f(\tau,y^{k-1}(\tau))\right\|d\tau\right| \leq L\left|\int_{t_0}^{t}\left\|y^k(\tau)-y^{k-1}(\tau)\right\|d\tau\right| \leq \\ &\leq L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{M(L|\tau-t_0|)^k}{Lk!}d\tau\right| = L\left|\frac{M(L|t-t_0|)^{k+1}}{L^2(k+1)!}\right| = \frac{M(L|t-t_0|)^{k+1}}{L(k+1)!}\end{aligned}$$

$$\left\|y^k(t)-y^{k-1}(t)\right\| \leq \frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} \leq \frac{M(Ld)^k}{Lk!},\text{ где } d=|J| \tag{5_k}$$

при этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(Ld)^k}{Lk!}$ сходится, а значит исходный ряд сходится равномерно. Значит, $y^k(t)$ сходятся равномерно к функции φ на J. $\Gamma y^k\subset K$ – замкнутое, поэтому и для предельной функции φ: $\Gamma\varphi\subset K$. Кроме того, $\varphi\in C(J)$, так как $y^k\in C(J)$. Докажем, что φ удовлетворяет интегральному уравнению. По определению:

$$\forall\, t\in J\quad y^k(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,y^{k-1}(\tau))d\tau$$

Тогда, если возможен предельный переход под знаком интегрирования в этом равенстве, то переходя к пределу при $k\to+\infty$, получим:

$$\forall\, t\in J\quad \varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

Покажем, что предельный переход возможен:

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t}f(\tau,y^{k-1}(\tau))d\tau-\int_{t_0}^{t}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right| &\leq \left|\int_{t_0}^{t}\left\|f(\tau,y^{k-1}(\tau))-f(\tau,\varphi(\tau))\right\|d\tau\right| \leq \\ &\leq L\left|\int_{t_0}^{t}\left\|y^{k-1}(\tau)-\varphi(\tau)\right\|d\tau\right| \leq \varepsilon Ld,\text{ где } \varepsilon=\sup_{\tau\in J}\left\|y^{k-1}(\tau)-\varphi(\tau)\right\|\end{aligned}$$

Теперь, если $k\to\infty$, то $\varepsilon\to 0$, а значит

$$\int_{t_0}^{t}f(\tau,y^{k-1}(\tau))d\tau \to \int_{t_0}^{t}f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

□

§ 7. Существование последовательных приближений Пикара на промежутке Пеано

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t, y) \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Зафиксируем положительные числа a, b и рассмотрим множества

$$B^+_{a,b}(t_0, y_0) = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y^n \mid t \in [t_0, t_0 + a], \|y - y_0\| \le b\}$$
$$B^-_{a,b}(t_0, y_0) = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y^n \mid t \in [t_0 - a, t_0], \|y - y_0\| \le b\}$$
$$B_{a,b}(t_0, y_0) = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times Y^n \mid t \in [t_0 - a, t_0 + a], \|y - y_0\| \le b\}$$

Множества $B^+_{a,b}(t_0, y_0)$, $B^-_{a,b}(t_0, y_0)$ и $B_{a,b}(t_0, y_0)$ по сути есть цилиндры в пространстве $\mathbb{R} \times Y^n$. Будем эти множества ради краткости и называть цилиндрами.

Определение. Пусть цилиндр $B_{a,b} \subset G$. Промежутком Пеано, соответствующим этому цилиндру, называется

$$J = [t_0 - h, t_0 + h] \quad h = \min\{a, \frac{b}{M}\} \quad M = \sup_{(t,y) \in B} \{\|f(t, y)\|\}$$

Аналогично, для $B^+ \subset G$ и $B^- \subset G$ вводятся соответствующие им промежутки Пеано

$$J^+ = [t_0, t_0 + h^+] \quad h^+ = \min\{a, \frac{b}{M^+}\} \quad M^+ = \sup_{(t,y) \in B^+} \{\|f(t, y)\|\}$$
$$J^- = [t_0 - h^-, t_0] \quad h^- = \min\{a, \frac{b}{M^-}\} \quad M^- = \sup_{(t,y) \in B^-} \{\|f(t, y)\|\}$$

Замечание. Определение промежутка Пеано корректно. Действительно, f непрерывна, значит, непрерывна и $\|f\|$, так как B компактно, то $\sup_{(t,y) \in B}\{\|f(t, y)\|\} \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Для задачи Коши (1)-(2) все последовательные приближения Пикара определены на промежутке Пеано, соответствующем цилиндру $B(t_0, y_0)$ и их графики лежат в цилиндре $B(t_0, y_0)$. Аналогичное утверждение верно для $B^+(t_0, y_0)$ и $B^-(t_0, y_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим цилиндр $B_{a,b}(t_0, y_0)$ (аналогично рассматривают B^+ и B^-) и пусть ему соответствует промежуток Пеано $J = [t_0 - h, t_0 + h]$. По индукции докажем, что $y^k(t)$ определены на J и $\Gamma y^k \subset B$.
База: При $k = 0$ имеем $y^0(t) \equiv y_0$, $t \in J$ и, конечно, $\Gamma y^0 \subset B_{a,b}(t_0, y_0)$.
Переход $(k) \Rightarrow (k + 1)$:

$$\forall\, t \in J \quad y^{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^k(\tau)) d\tau$$

$$\|y^{k+1}(t) - y_0\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(\tau, y^k(\tau)) \right\| d\tau \right| \le M|t - t_0| \le Mh \le b$$

А значит $(t, y^{k+1}(t)) \in B$ при любом $t \in J$. □

Теорема. *(Слабая теорема существования)*
Пусть $B = B_{a,b}(t_0, y_0) \subset G$ и пусть функция $f(t, y) \in Lip_2(B)$. Тогда задача Коши (1)-(2) имеет решение на промежутке Пеано, соответствующем B. Аналогичное утверждение верно для $B = B^-$ и $B = B^+$.

Доказательство. Доказываемое утверждение следует непосредственно из теоремы Пикара. □

Замечание. Благодаря условию Липшица в формулировке теоремы, гарантируется и свойство единственности на данном промежутке.

Замечание. Мы докажем, что условие Липшица в формулировке можно опустить. Таким образом, для существования решения достаточно непрерывности функции f.

§ 8. Предельная теорема

$\mathcal{H} \subset \{h : A \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n \mid h \in C(A, \mathbb{C}^n)\}$

Определение. Семейство функций $\mathcal{H}$ называется **равномерно ограниченным**, если

$$\exists\, M > 0 : \forall\, x \in A \;\forall\, h \in \mathcal{H} \quad \|h(x)\| \le M$$

Семейство функций $\mathcal{H}$ называется **равностепенно непрерывным**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 : \forall\, \overline{x}, \overline{\overline{x}} \in A \quad \|\overline{x}, \overline{\overline{x}}\| < \delta \Rightarrow \forall\, h \in \mathcal{H} \quad \|h(\overline{x}) - h(\overline{\overline{x}})\| < \varepsilon$$

Теорема. *Если $\mathcal{H} = \{h_k(x)\}$ – последовательность функций, A – компакт, и $h_k(x) \rightrightarrows h_0(x)$ на $A \Rightarrow \{h_k(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.*

Доказательство.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

□

Теорема. *(Теорема Арцелла – Асколи)*
Пусть последовательность $\mathcal{H} = \{h_k(x)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Функции h_k заданы на компакте. Тогда из $\mathcal{H}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \quad (t_0, y_0) \in G \tag{2}$$

и последовательность задач Коши

$$y' = f_k(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f_k \in C(G, Y^n) \tag{1_k}$$

$$y|_{t=t_k} = y_k \quad (t_k, y_k) \in G \tag{2_k}$$

Теорема. *(Предельная)*
Пусть G – компакт в $\mathbb{R} \times Y^n$, $f_k(t, y) \rightrightarrows f(t, y)$ на G, $t_k \to t_0$, $y_k \to y_0$ и пусть $\varphi_k(t)$, $t \in J$, где J – отрезок в $\mathbb{R}$, является решением задачи Коши (1_k)-(2_k). Тогда из последовательности $\{\varphi_k(t)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к φ, и предел любой такой равномерно сходящейся подпоследовательности есть решение задачи Коши (1)-(2).

Доказательство. $\{f_k(t, y) \mid (t, y) \in G\}$ – равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Функции φ_k заданы на компакте J и непрерывны, откуда получаем, что последовательность $\{\varphi_k\}$ равномерно ограничена.

$$\exists\, M > 0 : \forall\, k \in \mathbb{N} \;\forall\, (t, y) \in G \quad \|f_k(t, y)\| \le M$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\forall t \in J \quad \varphi_k(t) = y_k + \int_{t_k}^{t} f_k(\tau, \varphi_k(\tau)) d\tau$$

$$\|\varphi_k(\overline{t}) - \varphi_k(\overline{\overline{t}})\| \le \left| \int_{\overline{\overline{t}}}^{\overline{t}} \|f_k(\tau, \varphi_k(\tau))\| \, d\tau \right| \le M |\overline{t} - \overline{\overline{t}}|$$

А значит, $\{\varphi_k\}$ – равномерно непрерывна. Используя теорему Арцелла-Асколи, выделим равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\varphi_{k_j}(t)\}$. Так как φ_{k_j} непрерывны, предельная функция φ тоже непрерывна. Докажем, что φ удовлетворяет интегральному уравнению.

$$\|f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau))\| = \|f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) - f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau)) + f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau))\| \leq$$
$$\leq \|f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) - f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau))\| + \|f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau)) - f(\tau,\varphi(\tau))\|$$

Так как $\varphi_{k_j}(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на J, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\,k_j > n_0\ \forall\,t \in J \quad \|\varphi_{k_j}(\tau) - \varphi(\tau)\| < \varepsilon$$

Далее, так как последовательность $f_k(t,y)$ равностепенно непрерывна, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\,k_j > n_0\ \forall\,\tau \in J \quad \|f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) - f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau))\| < \varepsilon$$

А значит $f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) \rightrightarrows f_{k_j}(\tau,\varphi(\tau))$ на J. Учитывая, наконец, что $f_k(t,y) \rightrightarrows f(t,y)$ на G, получаем, что $f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau)) \rightrightarrows f(\tau,\varphi(\tau))$ на J. Тогда, осуществляя предельный переход в равенстве

$$\forall\,t \in J \quad \varphi_{k_j}(t) = y_{k_j} + \int_{t_{k_j}}^{t} f_{k_j}(\tau,\varphi_{k_j}(\tau))d\tau$$

и, учитывая, что равномерная сходимость подынтегрального выражения позволяет нам перейти к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\forall\,t \in J \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

□

§ 9. Теорема Пеано

$$y' = f(t,y) \quad (t,y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t,y) \in C(G,Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Теорема. *(Теорема об аппроксимации)*
Предположим, что $f \in C(G,Y^n)$, D – компакт в G, тогда существует последовательность $f_k(t,y) \in C(D,Y^n)$:

1) $f_k(t,y) \in Lip_2(D)$
2) $\|f_k(t,y)\| \leq \sup\limits_{(t,y)\in D} \|f(t,y)\|$
3) $f_k(t,y) \rightrightarrows f(t,y)$ *на* D *при* $k \to \infty$

Теорема. *(Теорема Пеано)*
Пусть $B = B_{a,b}(t_0,y_0) \subset G$. Тогда задача Коши (1)-(2) имеет решение на промежутке Пеано, соответствующем этому цилиндру. Аналогичное утверждение верно для $B^+_{a,b}(t_0,y_0)$ и $B^-_{a,b}(t_0,y_0)$.

Доказательство. Используя утверждение теоремы об аппроксимации, рассмотрим последовательность функций $f_k(t,y)$, аппроксимирующих $f(t,y)$ на B, и последовательность задач Коши

$$y' = f_k(t,y) \quad (t,y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f_k(t,y) \in Lip_2(B) \tag{1_k}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2_k}$$

Согласно слабой теореме существования, существует $\varphi_k(t)$ – решение задачи Коши (1_k)-(2_k).

$$\varphi_k(t) \quad t \in [t_0 - h_k, t_0 + h_k] \quad h_k = \min\{a, \frac{b}{M_k}\} \quad M_k = \sup_B \|f_k(t,y)\|$$

При этом важно, что

$$M_k = \sup_B \|f_k(t,y)\| \leq \sup_B \|f(t,y)\| = M \Rightarrow h = \frac{b}{M} \leq \frac{b}{M_k} = h_k$$

А значит $domf(t,y) \subset domf_k(t,y)$. Рассмотрим сужения функций $\varphi_k(t,y)$ на $J = [t_0 - h, t_0 + h]$. Выполняются все условия предельной теоремы, и значит, существует решение задачи Коши (1)-(2) на J. □

Пример. Теорема Пеано не гарантирует единственность решения.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \quad (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad y|_{t=0} = 0$$

Решение в этом случае существует, но не единственно: $y = 0$, $y = t^3$.

§ 10. Продолжения решений

Решения, гарантируемые теоремами существования, вообще говоря, не являются максимально продолженными. Именно вопросы продолжимости решений мы изучим в этом параграфе.

1°. Критерий продолжимости

$$y' = f(t,y) \quad (t,y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t,y) \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Определение. Решение $\varphi(t)$, $t \in J = \langle \alpha, \beta \rangle$ системы (1) называется продолжимым вправо (влево), если оно является сужением какого-либо решения этой системы, определенного на промежутке, содержащем хотя бы одно значение $t^* \geq \beta$, $t^* \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ ($t^* \leq \alpha$, $t^* \notin \langle \alpha, \beta \rangle$).

Лемма. *(о существовании предела у решения)*
Пусть $y = \varphi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta)$, $\beta < +\infty$ – решение системы (1), существуют $\{t_k\} \subset \langle \alpha, \beta)$ и $p \in Y^n$ такие, что

1) $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \beta$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi(t_k) = p$

2) *$\exists V$ – окрестность точки (β, p) в $\mathbb{R} \times Y^n$: $f(t,y)$ – ограничена на $V \cap G$*

Тогда $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = p$.

Доказательство. $a > 0$, $B_{a,a}(\beta, p) \subset V$, $M = 1 + \sup \|f(t,y)\|$. При достаточно больших k выполнено

$$0 < \beta - t_k < \frac{a}{2M} \tag{3}$$

$$\|\varphi(t_k) - p\| < \frac{a}{2} \tag{4}$$

Утверждается, что тогда

$$\forall\, t \in [t_k, \beta) \quad \|\varphi(t) - \varphi(t_k)\| < M(\beta - t) \tag{5}$$

При $t = t_k$ неравенство (5) выполнено, тогда противное означает,

$$\exists\, t^* \in (t_k, \beta)\ \forall\, t \in [t_k, t^*) \quad \|\varphi(t) - \varphi(t_k)\| < M(\beta - t) \tag{6}$$

$$\|\varphi(t^*) - \varphi(t_k)\| = M(\beta - t^*) \tag{7}$$

$\varphi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta)$ – решений задачи Коши с начальной точкой $(t_k, \varphi(t_k)) \in G$. Тогда

$$\forall\, t \in [t_k, t^*] \quad \varphi(t) = \varphi(t_k) + \int_{t_k}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \tag{8}$$

Причем $f(\tau, \varphi(\tau)) \in V \cap G$ при любом $\tau \in [t_k, t^*]$. Откуда $\|\varphi(t^*) - \varphi(t_k)\| < M(t^* - t_k)$, что противоречит (7). Докажем теперь непосредственно утверждение леммы:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ фиксируем } k \in \mathbb{N} : 0 < \beta - t_k < \frac{1}{2M} \min\{a, \varepsilon\},\ \ \|\varphi(t_k) - p\| < \frac{1}{2} \min\{a, \varepsilon\}$$

При таком k, естественно, выполнено (5). Выписывая определение предела, получаем

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \beta - t_k : \forall\, t \in (\beta - \delta, \beta) = (t_k, \beta) \\ \|\varphi(t) - p\| = \|\varphi(t) - \varphi(t_k) + \varphi(t_k) - p\| \leq \|\varphi(t) - \varphi(t_k)\| + \|\varphi(t_k) - p\| < \\ < M(\beta - t) + \frac{1}{2} \min\{a, \varepsilon\} < M \frac{1}{2M} \min\{a, \varepsilon\} + \frac{1}{2} \min\{a, \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{gathered}$$

□

Теорема. *(критерий продолжимости)*
Пусть $y = \varphi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta)$, $\beta < +\infty$ – решение системы (1) и существуют $\{t_k\} \subset \langle\alpha, \beta)$ и $p \in Y^n$:

1) $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \beta$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \varphi(t_k) = p$

2) $(\beta, p) \in G$

Тогда

$$y = \widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t & t \in \langle\alpha, \beta) \\ p & t = \beta \end{cases}$$

является решением системы (1).

Доказательство. Из условия (2) данной теоремы следует условие (2) предыдущей леммы. Тогда $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = p$. Доопределим $\varphi(t)$ при $t = \beta$ значением p до непрерывной функции $\widetilde{\varphi}(t)$, $\Gamma\widetilde{\varphi} \subset G$. Фиксируем $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $y_0 = \widetilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0)$. Так как $\varphi(t)$ – решение задачи Коши (1)-(2), имеем

$$\forall\, t \in \langle\alpha, \beta) \quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Учитывая непрерывность $f(t, \widetilde{\varphi}(t))$ при $t = \beta$, переходим в последнем равенстве к пределу и получаем равенство при $t = \beta$. Таким образом

$$\forall\, t \in \langle\alpha, \beta] \quad \widetilde{\varphi}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \widetilde{\varphi}(\tau)) d\tau$$

□

2°. Свойства непродолжимых решений

Теорема. *(характеристическое свойство непродолжимых решений)*
Пусть $y = \varphi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta)$ – решение системы (1), непродолжимое вправо. Тогда

$$\forall\, K \subset G,\ K \text{ – компакт}, \exists\, \beta' \in \langle\alpha, \beta)\ \forall\, t \in (\beta', \beta) \quad (t, \varphi(t)) \notin K$$

Иначе говоря, решение выйдет из любого компакта.

Доказательство. Если $\beta = +\infty$, то решение покидает любой компакт и утверждение очевидно. Если $\beta < +\infty$, то предположим противное

$$\exists\, K \subset G,\ K \text{ – компакт},\ \exists\, t_k \to \beta - 0 \quad (t_k, \varphi(t_k)) \in K$$

Так как K – компакт, то из последовательности $(t_k, \varphi(t_k))$ выберем сходящуюся подпоследовательность, а тогда выполнены все условия критерия продолжимости, откуда получаем, что решение продолжимо! □

Теорема. *Пусть $\varphi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta]$ – непродолжимое вправо решение системы (1). Тогда $(\beta, \varphi(\beta)) \in \partial G$.*

Доказательство. От противного. Пусть $(\beta, \varphi(\beta)) \in \operatorname{int} G$. Тогда $\exists\, B^{+}_{a,b}(\beta, \varphi(\beta)) \subset G$ и для такого цилиндра выполнены условия теоремы Пеано. То есть $\exists\, \xi(t),\ t \in [\beta, \beta + h^+]\ \xi(\beta) = \varphi(\beta)$. Определим

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in \langle\alpha, \beta] \\ \xi(t) & t \in [\beta, \beta + h^+] \end{cases}$$

При этом $\Gamma\widetilde{\varphi} \subset G$, $\widetilde{\varphi}$ – непрерывна на промежутке задания $\langle\alpha, \beta + h^+]$. Наконец $\widetilde{\varphi}$ – дифференцируема:

$$\lim_{t \to \beta - 0} \widetilde{\varphi}'(t) = \lim_{t \to \beta - 0} \varphi'(t) = \lim_{t \to \beta - 0} f(t, \varphi(t)) = f(\beta, \varphi(\beta))$$

$$\lim_{t \to \beta + 0} \widetilde{\varphi}'(t) = \lim_{t \to \beta - 0} \xi'(t) = \lim_{t \to \beta - 0} f(t, \xi(t)) = f(\beta, \xi(\beta))$$

То есть правая и левая производные в единственной подозрительной точке $t = \beta$ существуют и равны. Значит, $\widetilde{\varphi}$ – решение системы (1), продолжающее φ! □

3°. О выходе непродолжимого решения на границу компакта

Теорема. *Пусть $\varphi(t)$, $t \in I$ – непродолжимое вправо решение системы (1) и, кроме того, $\exists\, t_0 \in I \quad (t_0, \varphi(t_0)) \in \operatorname{int} K$, где K – компакт в G. Тогда*

$$\exists\, t^+ \in I,\ t^+ > t_0 : \forall\, t \in [t_0, t^+) \quad (t, \varphi(t)) \in \operatorname{int} K \text{ и } (t^+, \varphi(t^+)) \in \partial K$$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$T = \{t \in I \mid t \geq t_0,\ (t, \varphi(t)) \notin \operatorname{int} K\} \subset [t_0, +\infty)$$

Множество T непусто. Если $I = \langle\alpha, \beta]$, то по предыдущей теореме $(\beta, \varphi(\beta)) \notin \operatorname{int} K$, если же $I = \langle\alpha, \beta)$, то получаем непустоту по характеристическому свойству непродолжимых решений. Таким образом, T – непустое, ограниченное снизу множество, значит, T имеет инфинум t^+. Рассмотрим последовательность точек $t_k \in T$, $t_k \to t^+$, тогда $(t_k, \varphi(t_k)) \to (t^+, \varphi(t^+))$ и, так как множество $G \setminus \operatorname{int} K$ – замкнуто, то $(t^+, \varphi(t^+)) \notin \operatorname{int} K$ и $t^+ \in T$. Если $t^+ = t_0$, то учитывая, что $(t^+, \varphi(t^+)) \notin \operatorname{int} K$, а $(t_0, \varphi(t_0)) \in \operatorname{int} K$, приходим к противоречию. А значит $t^+ > t_0$.

По выбору t^+ как инфинума, получаем $\forall\, t \in [t_0, t^+) \quad (t, \varphi(t)) \in \operatorname{int} K$.

Установим теперь, что $(t^+, \varphi(t^+)) \in \partial K$. Если $(t^+, \varphi(t^+)) \in \operatorname{int} K$, то и некоторое время после t^+ график решения все еще будет в компакте K, если $(t^+, \varphi(t^+)) \notin K$, то существует момент $t < t^+$, при котором график решения уже вышел из компакта. В обоих случаях получаем противоречие с выбором t^+ как инфинума. Значит, $(t^+, \varphi(t^+)) \in K \setminus \operatorname{int} K = \partial K$. □

§ 11. Теорема об интегральной непрерывности

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t, y) \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t = t_0} = y_0 \tag{2}$$

$$z' = h(t, z) \quad (t, z) \in G_0 \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad h \in C(G_0, Y^n) \tag{1_0}$$

Пусть существует интервал $J \subset \mathbb{R}$ такой, что $(t, 0) \in G$ и $h(t, 0) = 0$ для любой точки t из J. Иначе говоря, система (1_0) имеет на J нулевое решение.

Для функций ξ таких, что $I \subset dom\xi$, введем в рассмотрение множество

$$D_r(I,\xi) = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times Y^n : \forall\, t \in I \quad \|y - \xi(t)\| \le r\}$$

Множество $D_r(I,\xi)$ представляет собой цилиндр в $\mathbb{R} \times Y^n$ с образующими, параллельными графику $\xi(t)$ на J и радиусом оснований r. Иначе говоря, $D_r(I,\xi)$ есть r-окрестность $\Gamma\xi|_J$.

1°. Лемма о решениях, близких к нулевому

Лемма. *Пусть система (1_0) обладает свойством единственности, $I = [\alpha,\beta] \subset J$ и существует число $r > 0$: $D_r(I,0) \subset G_0$. Тогда $\forall\, t_0 \in I\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta' > 0$: из*
(a) $(\tau,\eta) \in I \times Y^n$ и $\|(\tau,\eta) - (t_0,0)\| < \delta'$
следует
(b) Задача Коши с начальной точкой (τ,η) имеет решение $z(t)$, $t \in I$: $\|z(t)\| < \varepsilon$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\, t_0 \in [\alpha,\beta)\ \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta' > 0\ \exists\, (\tau,\eta) \in \mathbb{R}\times Y^n$: выполняется (a) и не выполняется (b). Обозначим $\varepsilon_0 = min\{\varepsilon, r\}$, $D = D_{\varepsilon_0}(I,0) \subset G_0$, $\delta = \varepsilon_0/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует последовательность точек $\{(\tau_k,\eta_k)\} \subset \mathbb{R} \times Y^n$ для которых выполнено (a) и не выполнено (b). Ясно, что из-за выбора δ' $\lim_{k\to\infty}(\tau_k,\eta_k) = (t_0,0)$. Рассмотрим множества, составляющие ∂D:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{(t,z) \in \mathbb{R} \times Y^n :\ t \in [\alpha,\beta]\,,\ \|z\| = r\} \text{ – боковая стенка}\\
C_1 &= \{(t,z) \in \mathbb{R} \times Y^n :\ t = \alpha,\ \|z\| < r\} \text{ – левый торец}\\
C_2 &= \{(t,z) \in \mathbb{R} \times Y^n :\ t = \beta,\ \|z\| < r\} \text{ – правый торец}
\end{aligned}$$

Так как $\|\eta_k\| < \varepsilon_0/2^k \le \varepsilon_0/2$, то на боковой стенке (τ_k,η_k) лежать не может, то есть она лежит или на торце, или внутри $D_{\varepsilon_0}(I,0)$. Тогда эта точка удовлетворяет теореме Пеано, по которой получаем, что существует решение задачи Коши с такой начальной точкой, значит, существует максимально продолженное решение $z_k(t)$, $t \in I_k$ задачи Коши с начальной точкой (τ_k,η_k). Из построения следует, что существует $t_k \in I_k$: $(t_k, z_k(t_k)) \in \operatorname{int} D$. Тогда, используя теорему о выходе непродолжимого решения на границу компакта, получаем

$$\exists\, t_k^+, t_k^- \in I_k :\ t_k^+ > t_k^-\ t_k^- \le \tau_k \le t_k^+ \tag{3}$$

$$\forall\, t \in (t_k^-, t_k^+)\ (t, z_k(t)) \in \operatorname{int} D \tag{4}$$

$$p_k^+ = (t_k^+, z_k(t_k^+)) \in \partial D \backslash C_1 = C_0 \cup C_2 \tag{5}$$

$$p_k^- = (t_k^-, z_k(t_k^-)) \in \partial D \backslash C_2 = C_0 \cup C_1 \tag{6}$$

Так как $(p_k^+, p_k^-) \in \partial D \times \partial D$ – компакт и можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, будем считать, что $\lim_{k\to\infty}(p_k^+, p_k^-) = (p^+, p^-) \in \partial D \times \partial D$. Где $p^+ = (t^+, z^+)$ и $p^- = (t^-, z^-)$, $\lim_{k\to\infty} t_k^\pm = t^\pm$ и $\lim_{k\to\infty} z_k^\pm = z^\pm$. Из (3) следует, что $t^- \le t_0 \le t^+$, а из (5) и (6) – $p^+ \in C_0 \cup C_2$, $p^- \in C_0 \cup C_1$.

Далее рассмотрим различные варианты расположения p^+.
Если $p^+ \in C_0$, то по теореме о сведении к интегральному уравнению

$$z_k(t_k^+) = \eta_k + \int_{t_k}^{t_k^+} h(t, z_k(t))dt$$

$$\|z_k(t_k^+)\| \le \|\eta_k\| + \left|\int_{t_k}^{t_k^+} \|h(t, z_k(t))\|dt\right| \le \|\eta_k\| + M(t_k^+ - \tau_k), \text{ где } M = \sup_D \|h(t,z)\|$$

И, переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем $\|z^+\| \le 0 + M(t^+ - t_0)$. Но $\|z^+\| = \varepsilon_0$, так как $p^+ \in C_0$. Откуда получаем, что

$$t^+ \ge t_0 + \frac{\varepsilon_0}{M} \tag{7}$$

Если $p^+ \in C_2$, то $p_k^+ \in C_2$ при достаточно больших $k \geq k^+$, то есть

$$\forall\, k \geq k^+ \quad t_k^+ = \beta \tag{8}$$

Рассматривая аналогично точку p^- получаем

$$\text{Если } p^- \in C_0, \text{ то } t^- \leq t_0 - \frac{\varepsilon_0}{M} \tag{9}$$

$$\text{Если } p^- \in C_1, \text{ то } \forall k \geq k^- \ t_k^- = \alpha \tag{10}$$

Если $p^+ \in C_2$ и $p^- \in C_1$, то выполнено (8), (10) и, учитывая (4), получаем, что $\forall\, k > k^* = max\{k^+, k^-\}\, \forall\, t \in [\alpha, \beta] \quad \|z_k(t)\| < \varepsilon$, а это противоречит тому, что условие (b) не выполняется. Значит, одна из точек p^+, p^- лежит на боковой стенке.

Разберем подробно случай $p^+ \in C_0$, случай $p^- \in C_0$ рассматривается аналогично. Введем в рассмотрение точки

$$t_2 = t^+ - \frac{\varepsilon_0}{2M} \quad t_1 = \begin{cases} \alpha, & \text{если } p^- \in C_1 \\ t^- + \frac{\varepsilon_0}{2M}, & \text{если } p^- \in C_0 \end{cases}$$

$\forall\, k > k^* \quad t_1 \leq \tau_k \leq t_2$. Тогда $\{z_k(t),\ t \in [t_1, t_2]\}_{k > k^*}$ есть множество решений системы

$$z_k' = h_k(t, z_k) \quad (t, z_k) \in D \text{ где } h_k \equiv h \tag{2_k}$$

с начальным условием $z_k(\tau_k) = \eta_k$. Выполнены все условия предельной теоремы. Тогда существует подпоследовательность $\{z_{j_k},\ t \in [t_1, t_2]\} \rightrightarrows z_0(t),\ t \in [t_1, t_2]$ и z_0 является решением системы (1_0) с начальным условием $z_0(t_0) = 0$, а по свойству единственности $z_0(t) \equiv 0$ на $[t_1, t_2]$. Наконец, используя теорему о сведении к интегральному уравнению, можем написать

$$z_{j_k}(t_{j_k}^+) = z_{j_k}(t_2) + \int_{t_2}^{t_{j_k}^+} h(t, z_{j_k}(t))dt$$

$$\|z_{j_k}(t_{j_k}^+)\| \leq \|z_{j_k}(t_2)\| + M|t_{j_k}^+ - t_2|$$

Учитывая, что $z_{j_k}(t_{j_k}^+) = p_{j_k}^+$ и, переходя к пределу по k, получаем $\varepsilon_0 = \|p^+\| \leq 0 + M|t^+ - t_2|$, откуда $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0/2$, что явно указывает на противоречие и в этом случае. □

2°. Лемма о разности двух решений

Пусть $\xi(t)$, $t \in J$ – решение системы (1). И пусть в системе (1_0)

$$G_0 = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times Y^n :\ t \in J\ (t, \xi(t) + z) \in G\}$$

$$h : G_0 \to Y^n \quad h(t, z) = f(t, \xi(t) + z) - f(t, \xi(t))$$

При таких G_0 и h система (1_0) действительно имеет нулевое решение на J.

Лемма. *Функция $y(t)$, $t \in I \subset J$ является решением системы (1) тогда и только тогда, когда функция $z(t) = y(t) - \xi(t)$, $t \in I$ является решением системы (1_0). При этом, если (1) обладает свойством единственности, то и (1_0) обладает свойством единственности.*

Доказательство. Пусть $\forall\, t \in I\ y'(t) = f(t, y(t))$, $z(t) = y(t) - \xi(t)$. Тогда $z'(t) = h(t, z(t))$ и $(t, z(t)) \in G_0$, так как $(t, y(t)) \in G$. Значит, $z(t)$ – решение системы (1_0). Ясно, что рассуждение обратимо.

Предположим, что система (1) свойством единственности обладает, а (1_0) – нет, то есть существуют $z_1(t)$, $z_2(t)$, $t \in I$ – различные решения задачи Коши системы (1_0) с начальной точкой (t_0, z_0). Но тогда $y_1(t) = \xi(t) + z_1(t)$, $y_2(t) = \xi(t) + z_2(t)$, $t \in I$ – различные решения задачи Коши системы (1) с одной начальной точкой, что приводит к противоречию. Значит и система (1_0) обладает свойством единственности. □

3°. Теорема об интегральной непрерывности

Теорема. *Пусть система (1) обладает свойством единственности. Пусть $\xi(t)$, $t \in I \subset J$ – решение задачи Коши системы (1) с начальной точкой (t_0, y_0) и пусть существует число $r > 0 : D_r(I, \xi) \subset G$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: из*
(a) $(\tau, \eta) \in I \times Y^n$ и $\|(\tau, \eta) - (t_0, y_0)\| < \delta$
следует
(b) Задача Коши с начальной точкой (τ, η) имеет решение $y(t)$, $t \in I$ и $\forall t \in I\ \|y(t) - \xi(t)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Наряду с (1) рассмотрим систему (1_0) с G_0 и h из пункта 2°. Система (1_0) имеет на I нулевое решение, $D_r(I, 0) \subset G_0$, по лемме о разности двух решений система (1_0) обладает свойством единственности. Выполнены условия леммы о решениях, близких к нулевому. Значит, $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta' > 0$: если $(\tau, \eta - \xi(\tau)) \in I \times Y^n$ и $\|(\tau, \eta - \xi(\tau)) - (t_0, 0)\| < \delta'$, то задача Коши системы (1_0) с начальной точкой $(\tau, \eta - \xi(\tau))$ имеет решение $z(t)$, $t \in I$ и $\|z(t)\| < \varepsilon$. Далее вновь по лемме о разности двух решений получаем, что $y(t) = z(t) + \xi(t)$ – решение системы (1), $y(\tau) = z(\tau) + \xi(\tau) = \eta - \xi(\tau) + \xi(\tau) = \eta$ и $\forall t \in I\ \|y(t) - \xi(t)\| < \varepsilon$.

Выберем теперь δ столь малым, что выполнено

$$|\tau - t_0| \le \|(\tau, \eta) - (t_0, y_0)\| < \delta < \delta'/2 \qquad \|\eta - y_0\| \le \|(\tau, \eta) - (t_0, y_0)\| < \delta < \delta'/4$$

и пусть еще $\|\xi(\tau) - y_0\| < \delta'/4$. Последнее возможно ввиду непрерывности $\xi(t)$ при $t = t_0$. Тогда можем написать

$$\|(\tau, \eta - \xi(\tau)) - (t_0, 0)\| \le |\tau - t_0| + \|\eta - \xi(\tau)\| \le |\tau - t_0| + \|\eta - y_0\| + \|\xi(\tau) - y_0\| < \delta'/2 + \delta'/4 + \delta'/4 = \delta'$$

Таким образом, при достаточно малом δ для $(\tau, \eta) \in I \times Y^n$: $\|(\tau, \eta) - (t_0, y_0)\| < \delta$ верно утверждение предыдущего абзаца. □

§ 12. Почти линейные системы

$$y' = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f(t, y) \in C(G, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Определение. Система (1) называется **почти линейной** над промежутком $I \subset \mathbb{R}$, если $G = I \times Y^n$ и

$$\exists\, M, N \in C(I, \mathbb{R}_+) : \forall (t, y) \in I \times Y^n \quad \|f(t, y)\| \le M(t)\|y\| + N(t) \tag{3}$$

Теорема. *(о почти линейных системах)*
Пусть (1) – почти линейная система над I. Тогда любая задача Коши (1)-(2) имеет максимально продолженное решение и это решение определено на всем I.

Доказательство. Так как $(t_0, y_0) \in G = I \times Y^n$, то хотя бы один из цилиндров $B_{a,b}(t_0, y_0)$, $B^+_{a,b}(t_0, y_0)$, $B^-_{a,b}(t_0, y_0)$ содержится в G. Тогда по теореме Пеано задача Коши (1)-(2) имеет решение, значит, существует максимально продолженное решение $\xi(t)$, $t \in J$. Предположим, что $J \ne I$. Ясно, что $J \subset I$. Если оба конца промежутка J бесконечны, то $\xi(t)$ заведомо определено на всем I. Тогда для определенности будем считать, что $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ и $\beta < +\infty$, $\beta \in \operatorname{int} I$. Рассмотрим две возможности.

Если $\beta \in J$, так как $\xi(t)$ – максимально продолженное, то $(\beta, \xi(\beta)) \in \partial G$, что приводит к противоречию с $\beta \in \operatorname{int} I$.

Если $\beta \notin J$, то в этом случае $t_0 < \beta$, $[t_0, \beta] \subset I$, $m = sup_{t \in [t_0, \beta]}\{M(t)\}$, $n = sup_{t \in [t_0, \beta]}\{N(t)\}$. Воспользуемся теоремой о сведении к интегральному уравнению.

$$\forall t \in [t_0, \beta] \quad \xi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \xi(\tau)) d\tau$$

$$\|\xi(t)\| \le \|y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(\tau, \xi(\tau))\| d\tau \right| \le \|y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} (M(\tau)\|\xi(\tau)\| + N(\tau)) d\tau \right| \le$$

$$\le \|y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} (m\|\xi(t)\| + n) d\tau \right| \le \|y_0\| + n(\beta - t_0) + m \int_{t_0}^{t} \|\xi(\tau)\| d\tau$$

Используя лемму Гронуолла, получаем, что

$$\|\xi(t)\| \leq (\|y_0\| + n(\beta - t_0))e^{m(\beta - t_0)}$$

То есть $\|\xi(t)\| \leq K$, и тогда решение не выходит из компакта $[t_0, \beta] \times [-K, K]$, но оно является максимально продолженным и должно выходить из любого компакта. $\square$

Глава III. Линейные системы

Рассмотрим задачу Коши нормальной системы

$$y_i' = p_i^1(t)y_1 + \ldots + p_i^n(t)y_n + q_i(t) \quad i = 1, \ldots, n \quad (t, y^1, \ldots, y^n) \in G = I \times Y^n \quad p_i^j, q_i \in C(I, Y)$$

$$y_i|_{t=t_0} = y_{0i}$$

и введем обозначения

$$P(t) = \{p_i^j(t)\} \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}$$

Тогда система перепишется в виде

$$y' = P(t)y + q(t) \quad (t, y) \in I \times Y^n = G \quad P \in C(I, Y_n^n) \quad q \in C(I, Y^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \tag{2}$$

Системы такого вида будем называть **линейными системами (ЛС)**.

§ 1. Теорема существования и единственности для линейной системы

Теорема. *Любая задача Коши линейной системы (1)-(2) имеет единственное решение, определенное на всем промежутке I.*

Доказательство. Убедимся, что линейная система является почти линейной.

$$G = I \times Y^n \quad \|f(t, y)\| = \|P(t)y + q(t)\| \leq \|P(t)y\| + \|q(t)\| \leq \|P(t)\|\|y\| + \|q(t)\|$$

По теореме о почти линейных системах получаем, что любая задача Коши имеет максимально продолженное решение, определенное на всем I.

$$\|f(t, \overline{y}) - f(t, \overline{\overline{y}})\| = \|P(t)(\overline{y} - \overline{\overline{y}})\| \leq \|P(t)\|\|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\| \Rightarrow f(t, y) \in locLip_2(I \times Y^n)$$

$\square$

Обозначим через $\mathcal{Y}_q$ множество всех решений системы (1), заданных на I. Заметим, что $\mathcal{Y}_q \subset C^1(I, Y^n)$.

О норме матрицы: Для $B \in Y_m^n$ норма матрицы $\|B\| = \sup_{\|x\|=1}\{\|Bx\|\}$. Норма матрицы обладает следующими свойствами: $\|Bz\| \leq \|B\|\|z\|$ и $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Для векторов мы будем использовать лишь евклидову норму. При этом надо помнить, что в случае вектора $z \in \mathbb{C}^n$, его евклидова норма будет равна $\sqrt{\sum_{i=1}^n z_i \overline{z}_i}$.

§ 2. Однородные линейные системы

Рассмотрим линейную систему

$$y' = P(t)y \quad (t, y) \in I \times Y^n \quad P(t) \in C(I, Y_n^n) \tag{3}$$

Множество всех решений этой системы, заданных на I, обозначим $\mathcal{Y}_0$. Системы такого вида будем называть **однородными линейными системами (ОЛС)**.

1°. Линейность пространства решений ОЛС

Лемма. *$\mathcal{Y}_0$ является линейным подпространством в $C^1(I, Y^n)$*

Доказательство. Доказывается непосредственной подстановкой. $\square$

Лемма. *Для $t_0 \in I$ определим $l_{t_0} : \mathcal{Y}_0 \to Y^n$, $l_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$. l_{t_0} является изоморфизмом.*

Доказательство.

$$l_{t_0}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(t_0) = l_{t_0}(\varphi_1) + l_{t_0}(\varphi_2)$$
$$l_{t_0}(\alpha\varphi) = (\alpha\varphi)(t_0) = \alpha l_{t_0}(\varphi)$$

Из теоремы существования и единственности следует биективность l_{t_0}. $\square$

Теорема. *(о структуре решений ОЛС)*
$\mathcal{Y}_0$ является n-мерным линейным подпространством в $C^1(I, Y^n)$.

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущих лемм. $\square$

Определение. Базис в $\mathcal{Y}_0$ называется фундаментальным семейством решений (ФСР) системы (3).

Следствие. *Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – ФСР, то $\{C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n : C_i \in Y\}$ – множество всех решений, заданных на I.*

Следствие. *$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – ФСР $\Leftrightarrow \forall\, i = 1, \ldots, n$ φ_i – решение и существует t_0 из I такое, что $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)$ линейно независимы в Y^n.*

Пример. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

Несложно указать два линейно независимых решения этой системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Значит, любое решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

2°. Лемма о частичном овеществлении ФСР

Лемма. *Если в ФСР уравнения (3) при $Y = \mathbb{C}$ имеется пара комплексно сопряженных решений $u(t)+iv(t)$ и $u(t)-iv(t)$, то замена этой пары на пару функций $u(t)$ и $v(t)$ оставляет семейство решений фундаментальным.*

Доказательство. Пусть $u(t) + iv(t) = \varphi(t)$, тогда $u(t) - iv(t) = \overline{\varphi}(t)$. Так как $u(t) = (\varphi(t) + \overline{\varphi}(t))/2$ и $v(t) = (\varphi(t) - \overline{\varphi}(t))/2i$, то функции $u(t)$ и $v(t)$ являются решениями системы (3) и замена не нарушит линейной независимости. Наконец, так как после замены общее количество решений не изменится, то семейство останется базисом в $\mathcal{Y}_0$. $\square$

3°. Фундаментальная матрица решений

Определение. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. **Матрицей решений** ОЛС (3) называется матричная функция $\Psi(t) : I \to Y^n_m$, дифференцируемая на I и такая, что $\forall\, t \in I\ \Psi'(t) = P(t)\Psi(t)$.

О дифференцируемости матричных функций: норма задает на Y^n_m метрику, что сразу дает возможность определить непрерывность матричной функции $\Psi(t)$. А производная в точке t_0 определяется как

$$\Psi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\Psi(t) - \Psi(t_0)}{t - t_0}$$

Если $\Psi(t) = \{\varphi^j_i(t)\}$,то непрерывность $\Psi(t)$ равносильна непрерывности всех $\varphi^j_i(t)$, дифференцируемость $\Psi(t)$ равносильна дифференцируемости всех $\varphi^j_i(t)$, и в случае дифференцируемости $\Psi'(t) = \{(\varphi^j_i)'(t)\}$.

Лемма. *Пусть* $\Psi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t)) : I \to Y^n_m$. $\Psi(t),\ t \in I$ *является матрицей решений системы (3)* $\Leftrightarrow \varphi^j(t),\ t \in I,\ j = 1, \ldots, m$ *– решения системы (3).*

Доказательство.

$$\Psi'(t) = (\frac{d\varphi^1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\varphi^m}{dt}(t)) = (P(t)\varphi^1(t), \ldots, P(t)\varphi^m(t)) = P(t)(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t)) = P(t)\Psi(t)$$

Несложно видеть, что рассуждение обратимо. □

Определение. Квадратная $n \times n$ матричная функция $\Phi(t),\ t \in I$ называется **фундаментальной матрицей решений (ФМР)** системы (3), если её столбцы линейно независимы.

Замечание. Матрица решений $\Phi(t),\ t \in I$ системы (3) является ФМР $\Leftrightarrow$ её размер $n \times n$ и существует t_0 в I такое, что $\det \Phi(t_0) \neq 0$.

Теорема. *Если* $\Phi(t),\ t \in I$ *– ФМР системы (3), то* $\{\Phi(t)S : t \in I,\ S \in Y^n_m\}$ *– множество всех* $n \times m$ *матриц решений.*

Доказательство. Имеем $(\Phi(t)S)' = \Phi'(t)S = (P(t)\Phi(t))S = P(t)(\Phi(t)S)$, значит, матрица вида $\Phi(t)S$ является матрицей решений. Любое решение системы (3), записанное в виде столбца, является линейной комбинацией столбцов матрицы $\Phi(t)$, а любая матрица решений составлена из таких столбцов и является произведением $\Phi(t)S$, где S – постоянная матрица. □

Теорема. *Если* $\Phi(t),\ t \in I$ *– ФМР системы (3), то* $\{\Phi(t)S,\ t \in I : S \in Y^n_n,\ S$ *невырождена*$\}$ *– множество всех ФМР размера* $n \times n$

Доказательство. Утверждение легко следует из предыдущей теоремы и замечания. □

4°. Матрица Коши

Определение. Пусть $\Phi(t),\ t \in I$ – ФМР системы (3). Матричная функция $\widetilde{\Phi}(t, \tau),\ (t, \tau) \in (I \times I)$, определенная равенством $\widetilde{\Phi}(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$, называется **матрицей Коши** системы (3).

Замечание. При любом τ из I $\det \Phi(\tau) \neq 0$, поэтому существует $\Phi^{-1}(\tau)$ и определение матрицы Коши корректно.

Свойства матрицы Коши:

1) Матрица Коши не зависит от выбора $\Phi(t)$, действительно, если $\Phi_2(t),\ t \in I$ – другая ФМР системы (3), то $\Phi_2(t) = \Phi(t)S$, где S – невырожденная матрица и $\widetilde{\Phi}_2(t, \tau) = \Phi_2(t)\Phi_2(\tau) = \Phi(t)SS^{-1}\Phi(\tau) = \widetilde{\Phi}(t, \tau)$. Несложно показать, что $\widetilde{\Phi}(t, \tau) \in C(I \times I, Y^n)$ и при фиксированном τ $\widetilde{\Phi}(t, \tau)$ является ФМР системы (3).

2) $\widetilde{\Phi}(t, t) = E,\ \ \widetilde{\Phi}^{-1}(t, \tau) = \widetilde{\Phi}(\tau, t)$.

3) $\forall\, t, \tau, \theta \in I \quad \widetilde{\Phi}(t, \theta)\widetilde{\Phi}(\theta, \tau) = \widetilde{\Phi}(t, \tau)$

4) $\det \widetilde{\Phi}(t, \tau) = \exp(\int_\tau^t \operatorname{tr}(P(\theta))d\theta)$.

Свойство (4) есть следствие формулы Лиувилля, которая будет доказана в следующем пункте.

5°. Формула Лиувилля

Теорема. *Пусть* $\Phi(t),\ t \in I$ *– матрица решений системы (3) размера* $n \times n$*,* $t_0 \in I$*. Тогда*

$$\forall\, t \in I \quad \det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(P(\tau))d\tau) \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_\alpha^\beta\} \in Y_n^n$, тогда можно рассмотреть отображение $\det : Y_n^n \to Y$.

$$\det(X) = \sum_{\beta=1}^{n} x_i^\beta A_\beta^i = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^j A_j^\alpha \quad i,j = 1,\ldots,n$$

Функция det, понимаемая как функция n^2 переменных, дифференцируема. И, так как алгебраическое дополнение A_j^i не зависит от x_i^k и x_k^j для любого $k = 1,\ldots,n$, то непосредственно дифференцированием получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i^j}\det(\{x_\alpha^\beta\}) = A_j^i$$

Рассмотрим отображение $W(t) : I \to Y,\ W(t) = \det(\Phi(t))$. Ясно, что $W(t)$ – скалярная дифференцируемая функция на I. Обозначим $\Phi(t) = \{\varphi_\alpha^\beta(t)\}$.

$$\begin{aligned}\dot W(t) = &\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(n,n)}\frac{\partial}{\partial x_i^j}\det(\{\varphi_\alpha^\beta\})\dot\varphi_i^j(t) = \\ &= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(n,n)} A_j^i(\{\varphi_\alpha^\beta\})\sum_{k=1}^{n} p_i^k(t)\varphi_k^j(t) = \sum_{(i,k)=(1,1)}^{(n,n)} p_i^k(t)\sum_{j=1}^{n} A_j^i(\{\varphi_\alpha^\beta\})\varphi_k^j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i^i \det(\{\varphi_\alpha^\beta\}) = \det(\{\varphi_\alpha^\beta\})\sum_{i=1}^{n} p_i^i(t) = \operatorname{tr}(P(t))W(t)\end{aligned}$$

При преобразованиях используется то, что

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^i(\{\varphi_\alpha^\beta\})\varphi_k^j = \begin{cases}\det(\{\varphi_\alpha^\beta\}), & \text{если } k = i\\ 0, & \text{если } k \neq i\end{cases}$$

Мы пришли к уравнению $\dot W(t) = \operatorname{tr}(P(t))W(t)$, его решение $W(t) = C\exp(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(P(\tau))d\tau)$. При $t = t_0$ получаем, что $C = W(t_0)$ и окончательно имеем

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}(P(\tau))d\tau)$$

□

§ 3. Неоднородные линейные системы

$$y' = P(t)y + q(t) \quad (t,y) \in I \times Y^n \quad P(t), q(t) \in C(I, Y_n^n) \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \quad (t_0, y_0) \in I \times Y^n \tag{2}$$

$$y' = P(t)y \quad (t,y) \in I \times Y^n \tag{3}$$

Лемма. *Разность любых двух решений системы (1) есть решение системы (3).*

Доказательство. Пусть $\overline{\varphi}$ и $\overline{\overline{\varphi}}$ – решения системы (1). Тогда $(\overline{\varphi}-\overline{\overline{\varphi}})' = \overline{\varphi}' - \overline{\overline{\varphi}}' = P(t)\overline{\varphi} + q(t) - P(t)\overline{\overline{\varphi}} - q(t) = P(t)(\overline{\varphi}-\overline{\overline{\varphi}})$, значит, разность $\overline{\varphi}$ и $\overline{\overline{\varphi}}$ есть решение системы (3). □

Теорема. *Пусть $\Phi(t),\ t \in I$ – ФМР системы (3) и $\psi(t),\ t \in I$ – решение системы (1), тогда любое решение системы (1) представимо в виде $y = \psi(t) + \Phi(t)C,\ t \in I,\ C \in Y^n$.*

Доказательство.

$$(\psi(t) + \Phi(t)C)' = \psi'(t) + (\Phi(t)C)' = P(t)\psi(t) + q(t) + P(t)(\Phi(t)C) = P(t)(\psi(t) + \Phi(t)C) + q(t)$$

Значит, $\psi(t) + \Phi(t)C \in \mathcal{Y}_q$. Если $\xi(t) \in \mathcal{Y}_q$, то по предыдущей лемме $\xi(t) - \psi(t) \in \mathcal{Y}_0$, тогда $\xi(t) - \psi(t) = \Phi(t)C$. □

Теорема. *(Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной)*
Пусть $\Phi(t),\ t \in I$ – ФМР системы (3), $C(t),\ t \in I$ – дифференцируемая векторная функция такая, что $\Phi(t)C'(t) = q(t)$. Тогда $y = \Phi(t)C(t),\ t \in I$ – решение системы (1).

Доказательство. Такая функция $C(t)$ существует, так как $\Phi(t)$ обратима и $\Phi^{-1}(t)q(t) \in C(I, Y^n)$. Проверим, что $\Phi(t)C(t)$ – решение системы (1)

$$(\Phi(t)C(t))' = \Phi(t)C'(t) + \Phi'(t)C(t) = P(t)(\Phi(t)C(t)) + q(t)$$

□

Замечание. В качестве $C(t)$ можно взять $C(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau,\ t, t_0 \in I$.

Следствие. *Пусть $\widetilde{\Phi}(t,\tau)$ – матрица Коши системы (3), тогда*

1) $\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)q(\tau)d\tau,\ t \in I$ *– решение системы (1).*

2) $\int_{t_0}^{t} \widetilde{\Phi}(t,\tau)q(\tau)d\tau,\ t \in I$ *– решение системы (1).*

3) *Решения системы (1) задаются формулой* $y = \widetilde{\Phi}(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{\Phi}(t,\tau)q(\tau)d\tau,\ t \in I$. *Кроме того, указанная функция является решением задачи Коши (1)-(2).*

Доказательство.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

□

§ 4. Автономные однородные линейные системы

$$y' = Ay \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times Y^n \quad A \in Y^n_n \tag{1}$$

Все выводы §2 здесь верны. $\mathcal{Y}_0$ – множество всех решений системы (1) заданных на $\mathbb{R}$, $\mathcal{Y}_0$ является n-мерным векторным пространством.

1°. Построение ФСР в случае простых собственных чисел матрицы A

Искать решения будем в виде $y = e^{\lambda t}s,\ t \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Тогда $y' = e^{\lambda t}\lambda s$ и

$$y = e^{\lambda t}s \text{ – решение системы (1)} \Leftrightarrow e^{\lambda t}s\lambda = A(e^{\lambda t}s) \Leftrightarrow As = \lambda s$$

Таким образом, s – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу λ. Пусть $s_1, \dots, s_n$ – собственные вектора матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда $\{e^{\lambda_1 t}s_1, \dots, e^{\lambda_n t}s_n\}$ – ФСР системы (1). Если $A \in \mathbb{R}^n_n$, то затем необходимо провести частичное овеществление ФСР.

2°. Матричные степенные ряды

$$B \in \mathbb{C}^n_n \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \quad f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \text{ – матричный степенной ряд}$$

Для матричных степенных рядов понятия сходимости и суммы ряда определяются аналогично числовым рядам.

Лемма. *Если $B = S^{-1}AS$, то*

$$f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \text{ – сходится} \Leftrightarrow f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k \text{ – сходится}$$

и в случае сходимости $f(B) = S^{-1}f(A)S$.

Доказательство.

$$B^k = S^{-1}A^kS \Rightarrow \alpha_k B^k = S^{-1}\alpha_k A^k S \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B^k = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k\right) S$$

Откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма. *Если $B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_m\}$, то*

$$f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \text{ – сходится} \Leftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, m \quad f(B_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B_j^k \text{ – сходится}$$

И в случае сходимости $f(B) = \operatorname{diag}\{f(B_1), \ldots, f(B_m)\}$.

Доказательство.

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad B^k = \operatorname{diag}\{B_1^k, \ldots, B_m^k\} \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B^k = \operatorname{diag}\{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_m^k\}$$

Откуда и следует утверждение леммы. □

3°. Матричная экспонента

Определим матричную экспоненту как сумму ряда

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Этот ряд сходится для любой матрицы A. Тогда рассмотрим отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}^n_n$, числу t сопоставляющее матрицу e^{tA}.

Лемма. *(Без доказательства)*
Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Пусть $A = S^{-1}JS$, J – Жорданова нормальная форма матрицы A, $J = \{J_{r_i}(\lambda_i)\}$, где $J_{r_i}(\lambda_i)$ – Жорданова клетка соответствующая собственному числу λ_i размера $r_i \times r_i$. Здесь каждое собственное число взято столько раз, какова его кратность. Тогда

$$e^{tA} = S^{-1}e^{tJ}S = S^{-1}\operatorname{diag}\{e^{tJ_{r_i}(\lambda_i)}\}S$$

Осталось вычислить $J_r(\lambda)$. $J_r(\lambda) = \lambda E_r + Z_r$, где $Z_r = J_r(0)$, более подробно Z_r – квадратная $r \times r$ матрица вида

$$Z_r = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ_r(\lambda)} = e^{t\lambda E_r + tZ_r} = e^{t\lambda E_r} e^{tZ_r} = e^{\lambda t} E_r e^{tZ_r} = e^{\lambda t} e^{tZ_r} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Z_r^k$$

Исходя из структуры матрицы Z_r, несложно понять, как выглядит матрица Z_r^k, кроме того получаем, что $Z_r^k = 0$, если $k \geq r$. Наконец

$$e^{tZ_r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Z_r^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ t & \ddots & & & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & & & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Следует заметить, что элементы матрицы e^{tA} являются квазимногочленами, значит e^{tA} дифференцируема.

4°. e^{tA} – фундаментальная матрица решений

Теорема. e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$ *является ФМР системы (1).*

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(t+\Delta t)A} - e^{tA}}{\Delta t} = e^{tA} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t A} - E}{\Delta t}$$

$$e^{\Delta t A} - E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^k}{k!} A^k = \Delta t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{k-1}}{k!} A^k$$

$$\frac{e^{\Delta t A} - E}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{k-1}}{k!} A^k = A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{k-1}}{k!} A^k = A + \Delta t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{k-2}}{k!} A^k$$

Последний ряд сходится, значит

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t A} - E}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(A + \Delta t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\Delta t)^{k-2}}{k!} A^k \right) = A$$

Таким образом $(e^{tA})' = Ae^{tA}$. Наконец, матрица e^{tA} невырождена, так как при любом вещественном t $\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr} A} > 0$ □

5°. Практическое построение фундаментальной матрицы решений

Пусть J – Жорданова форма матрицы A и пусть $A = SJS^{-1}$. Таким образом, для нахождения e^{tA} недостаточно найти лишь J, необходимо знать и матрицу S, однако, обращения матрицы S можно избежать. В качестве ФМР системы (1) берем не e^{tA}, а $\Phi(t) = e^{tA}S = Se^{tJ}S^{-1}S = Se^{tJ}$. Для нахождения матрицы S можно применять следующий метод. В этом пункте Жордановы клетки $J_{r_i}(\lambda_i)$ считаем верхнетреугольными. Пусть $J = \operatorname{diag}\{J_{r_i}(\lambda_i)\}$, разделим столбцы матрицы S так, что $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ и S_i содержит r_i столбцов. Из $AS = SJ$ следует, что для любого $i = 1, \ldots, m$ $AS_i = S_i J_{r_i}(\lambda_i)$. Если теперь считать, что $\Phi(t) = \{\Phi_1(t), \ldots, \Phi_m(t)\}$, где $\Phi_i(t)$ содержит r_i столбцов, то для любого $i = 1, \ldots, m$ $\Phi_i(t) = S_i e^{tJ_{r_i}(\lambda_i)}$. Для краткости опустим далее индекс i.

$$A\{S^1, \ldots, S^r\} = \{S^1, \ldots, S^r\} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & & & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\{\varphi^1(t),\ldots,\varphi^r(t)\}=\{S^1,\ldots,S^r\}e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & & & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}\\ 0 & 0 & & & \ddots & t\\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Откуда

$$(A-\lambda E)S^1=0,\ (A-\lambda E)S^2=S^1,\ldots,\ (A-\lambda E)S^r=S^{r-1}$$

Последовательно решая эти системы линейных уравнений, находим $S^1,\ldots,S^r$. После явно выписываются

$$\varphi^1(t)=S^1e^{\lambda t},\ \varphi^2(t)=(tS^1+S^2)e^{\lambda t},\ldots,\ \varphi^r(t)=e^{\lambda t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}S^1+\ldots+S^r\right)$$

Глава IV. Зависимость решения нормальной системы от начальных параметров

$$y'=f(t,y)\quad (t,y)\in G\subset\mathbb{R}\times Y^n\quad f(t,y)\in C(G,Y^n)\tag{1}$$

$$y|_{t=t_0}=y_0\quad (t_0,y_0)\in G\tag{2}$$

Дополнительно будем считать, что G открыто в $\mathbb{R}\times Y^n$ и система (1) обладает свойством единственности. Через $I(t_0,y_0)$ обозначим промежуток, на котором задано максимально продолженное решение задачи Коши (1)-(2), следует заметить, что это решение существует и единственно. Определим множество $\widetilde{G}$ следующим образом

$$\widetilde{G}=\{(t,\tau,\eta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times Y^n : t\in I(\tau,\eta),\ (\tau,\eta)\in G\}$$

Введем функцию трех переменных $\widetilde{y}:\widetilde{G}\to Y^n$ так, что функция одной переменной $\widetilde{y}(t,\tau,\eta)$, $t\in I(\tau,\eta)$ – максимально продолженное решение задачи Коши системы (1) с начальной точкой (τ,η). Изучение поведения функции $\widetilde{y}$ как функции трех переменных и будет целью этой главы. Среди очевидных свойств можно сразу отметить, что $(\tau,\tau,\eta)\in\widetilde{G}$ и $\widetilde{y}(\tau,\tau,\eta)=\eta$.

§1. Непрерывность решения по начальным данным

Теорема. *Если выполнены все условия из введения главы, то множество $\widetilde{G}$ открыто в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times Y^n$ и $\widetilde{y}\in C(\widetilde{G},Y^n)$.*

Доказательство. Зафиксируем $p_0=(\tau_0,\eta_0)\in G$, $\varepsilon>0$, $(t_0,p_0)\in\widetilde{G}$, где $t_0\in I(\tau_0,\eta_0)$ – открытое в $\mathbb{R}$. Выберем промежуток $\bar{J}=[\alpha,\beta]\subset I(\tau_0,\eta_0)$ так, что $t_0,\tau_0\in(\alpha,\beta)$. И рассмотрим решение $\widetilde{y}(t,p_0)$, $t\in\bar{J}=[\alpha,\beta]$. Естественно, $\Gamma\widetilde{y}\subset G$, но, кроме того, существует $r>0$ такое, что $D_r(\bar{J},\widetilde{y}(t,p_0))\subset G$, значит применима теорема об интегральной непрерывности, используем её для $\varepsilon/2$.

$$\exists\,\delta>0:\|p-p_0\|<\delta\Rightarrow$$

1) $p\in G$

2) $\bar{J}\subset I(p)$

3) $\forall\, t\in\bar{J}\quad \|\widetilde{y}(t,p)-\widetilde{y}(t,p_0)\|<\varepsilon/2$

4) $[t_0-\delta,t_0+\delta]\subset\bar{J}\subset I(p_0)$

5) $\forall\, t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]\quad \|\widetilde{y}(t,p_0)-\widetilde{y}(t_0,p_0)\|<\varepsilon/2$

Пункты (1),(2) и (3) следуют из теоремы об интегральной непрерывности, используя непрерывность $\widetilde{y}(t,p_0)$, получаем выполнение пунктов (4) и (5). Пусть $(t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times Y^n$ и $\|(t,p)-(t_0,p_0)\| < \delta$, тогда $|t-t_0| < \delta$, $\|p-p_0\| < \delta$, из пунктов (1) и (4) следует, что $p \in G$, $t \in \bar{J}$, из пункта (2) – $(t,p) \in \widetilde{G}$, значит, $\widetilde{G}$ открыто.

$$\|\widetilde{y}(t,p)-\widetilde{y}(t_0,p_0)\| \le \|\widetilde{y}(t,p)-\widetilde{y}(t,p_0)\| + \|\widetilde{y}(t,p_0)-\widetilde{y}(t_0,p_0)\| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

Последнее неравенство в цепочке следует из пунктов (3) и (5). □

Замечание. Несложно видеть, что теорема об интегральной непрерывности, в свою очередь, следует из последней теоремы.

§ 2. Дифференцируемость решения по начальным данным

Повторим здесь предположения из введения главы

$$y' = f(t,y) \quad (t,y) \in G \subset \mathbb{R}\times Y^n \quad f(t,y) \in C(G,Y^n) \tag{1}$$

G открыто в $\mathbb{R}\times Y^n$, система (1) обладает свойством единственности. И дополнительно потребуем $D_2 f(t,y) \in C(G,Y^n)$.

1°. Лемма Адамара

Теорема. *Если G открыто, а $f(t,y)$ и $D_2 f(t,y)$ непрерывны на G, то $f(t,y) \in locLip_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $(t_0,y_0) \in G$, V – шар с центром в (t_0,y_0), вместе со своей границей содержащийся в G, $L = \sup\{\|D_2 f(t,y)\| : (t,y) \in V\}$. Выбираем $(t,\overline{y}),(t,\overline{\overline{y}}) \in V$. Параметризуем отрезок от $(t,\overline{y})$ до $(t,\overline{\overline{y}})$: $u(s) = (1-s)\overline{y} + s\overline{\overline{y}}$, $s \in [0,1]$. Ясно, что $(t,u(s)) \in V$ при любом $s \in [0,1]$. Введем функцию $g_t(s) = f(t,y)|_{y=u(s)}$, $s \in [0,1]$. При этом $g_t(s)$ дифференцируема.

$$g_t'(s) = D_2 f(t,y)|_{y=u(s)} u'(s) = D_2 f(t,y)|_{y=u(s)}(\overline{\overline{y}}-\overline{y})$$

$$\int_0^1 g_t'(s)ds = g_t(1)-g_t(0) = f(t,\overline{\overline{y}}) - f(t,\overline{y})$$

значит

$$f(t,\overline{\overline{y}}) - f(t,\overline{y}) = \int_0^1 D_2 f(t,y)|_{y=u(s)}(\overline{\overline{y}}-\overline{y})ds$$

и тогда

$$\|f(t,\overline{\overline{y}}) - f(t,\overline{y})\| \le \int_0^1 \|D_2 f(t,y)|_{y=u(s)}\|ds \le L\|\overline{\overline{y}}-\overline{y}\|$$

□

2°. Теорема о дифференцируемости решения по начальным данным и её следствия

Теорема. *Если G открыто, $f(t,y)$ и $D_2 f(t,y)$ непрерывны на G, то $\widetilde{y}(t,\tau,\eta)$, $(t,\tau,\eta) \in \widetilde{G}$ непрерывно дифференцируема на $\widetilde{G}$, кроме того, $D_2\widetilde{y}(t,\tau,\eta)$ и $D_3\widetilde{y}(t,\tau,\eta)$ непрерывно дифференцируемы по t.*

Теорема. *Если G открыто и $f(t,y) \in C^k(G,Y^n)$, где $k \in \{1,2,\ldots,\infty,a\}$, то $\widetilde{y}(t,\tau,\eta) \in C^k(\widetilde{G},Y^n)$. Кроме того, все смешанные производные порядка $s \le k$ непрерывно дифференцируемы по t.*

Определение. Пусть $y = \xi(t)$, $t \in J$ – решение системы (1). **Системой в вариациях** на решение $y = \xi(t)$, $t \in J$ системы (1) называется однородная линейная система

$$z' = D_2 f(t,\xi(t))z \quad (t,z) \in J\times Y^n$$

Пример.
$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_1 y_2 - \frac{1}{t} \\ y_2' = -y_2^2 \end{cases} \qquad y = (y_1, y_2) \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$$
Несложно видеть, что $y_1 = t$, $y_2 = \frac{1}{t}$ – решение.
$$D_2 f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 & 1 + y_1 \\ 0 & -2y_2 \end{pmatrix} \quad D_2 f(t, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 + t \\ 0 & -\frac{2}{t} \end{pmatrix}$$
Тогда система в вариациях
$$\begin{cases} z_1' = \frac{1}{t} z_1 + (1+t) z_2 \\ z_2' = -\frac{2}{t} z_2 \end{cases}$$

Следствие. *При фиксированном $(\tau, \eta) \in G$ матричная функция $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, $t \in I(\tau, \eta)$ является фундаментальной матрицей решений системы в вариациях на решение $\widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, $t \in I(\tau, \eta)$ системы (1). При этом $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} = E_n$.*

Доказательство.
$$\forall (t, \tau, \eta) \in \widetilde{G} \quad D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = f(t, \widetilde{y}(t, \tau, \eta))$$
$$D_3 D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = D_2 f(t, \widetilde{y}(t, \tau, \eta)) D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$$
Учитывая $D_3 D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = D_1 D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, получаем, что квадратная $n \times n$ матрица $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, является матрицей решений системы в вариациях. Наконец, из того, что $\widetilde{y}(\tau, \tau, \eta) = \eta$ следует, что $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} = E_n$, значит, $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$ невырождена в точке $t = \tau$ и является ФМР. □

Замечание.
$$\det D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = \exp \int_\tau^t \operatorname{tr}(D_2 f(\theta, \tau, \eta)) d\theta$$

Следствие. *При фиксированном $(\tau, \eta) \in G$ вектор функция $D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, $t \in I(\tau, \eta)$ является решением системы в вариациях на решение $\widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, $t \in I(\tau, \eta)$ системы (1). При этом,*
$$\forall (t, \tau, \eta) \in \widetilde{G} \quad D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) + D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) f(\tau, \eta) = 0$$

Доказательство.
$$\forall (t, \tau, \eta) \in \widetilde{G} \quad D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = f(t, \widetilde{y}(t, \tau, \eta))$$
$$D_2 D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = D_2 f(t, \widetilde{y}(t, \tau, \eta)) D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$$
Учитывая $D_2 D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = D_1 D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$, получаем, что $D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$ является решением системы в вариациях.
$$D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} + D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} = 0$$
$$D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} = -D_1 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)|_{t=\tau} = -f(\tau, \eta)$$
Так как $D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) C$ задает множество всех решений системы в вариациях, то существует C_0 такое, что $-D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) = D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) C_0$. Наконец, ясно, что $C_0 = f(\tau, \eta)$. □

Существует другой путь доказательства этого утверждения.

Доказательство.
$$\forall (t, \tau, \eta) \in \widetilde{G} \; \forall (\theta, \tau, \eta) \in \widetilde{G} \quad \widetilde{y}(t, \theta, \widetilde{y}(\theta, \tau, \eta)) = \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$$
Равенство имеет место, так как при $t = \theta$ выражения совпадают и выполняется свойство единственности.
$$D_2 \widetilde{y}(t, \theta, \widetilde{y}(\theta, \tau, \eta)) + D_3 \widetilde{y}(t, \theta, \widetilde{y}(\theta, \tau, \eta)) D_1 \widetilde{y}(\theta, \tau, \eta) = 0$$
Положим $\theta = \tau$
$$D_2 \widetilde{y}(t, \tau\, \eta) + D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) D_1 \widetilde{y}(\tau, \tau, \eta) = 0$$
$$D_2 \widetilde{y}(t, \tau\, \eta) + D_3 \widetilde{y}(t, \tau, \eta) f(\tau, \eta) = 0$$
Откуда и получаем, что $D_2 \widetilde{y}(t, \tau, \eta)$ – решение системы в вариациях. □

§ 3. Зависимость решения от параметров

$$y' = f_\mu(t,y) \quad (t,y) \in G_\mu \subset \mathbb{R} \times Y^n \quad f_\mu(t,y) \in C(G_\mu, Y^n) \quad \mu \in M \subset Y^m \tag{1_μ}$$

Дополнительно будем считать, что G_μ открыто в $\mathbb{R} \times Y^n$ и при любом $\mu \in M$ выполнено свойство единственности.

$$y|_{t=\tau} = \eta \quad \mu \in M \tag{2}$$

$$g = \{(\tau,\eta,\mu) : (\tau,\eta) \in G_\mu,\ \mu \in M\} \subset \mathbb{R} \times Y^n \times Y^n$$

$$\widetilde{g} = \{(t,\tau,\eta,\mu) : t \in I(\tau,\eta,\mu),\ (\tau,\eta,\mu) \in g\}$$

Аналогично введению главы определим функцию $\widetilde{y} : \widetilde{g} \to Y^n$, но теперь с зависимостью от μ.

Введём функцию $f : g \to Y^n$, $f(t,y,\mu) := f_\mu(t,y)$ и рассмотрим нормальную систему

$$\begin{cases} y' = f(t,y,\mu) \quad (t,y,\mu) \in g \\ \mu' = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение выражает естественное требование независимости μ от t. Задача Коши для этой системы ставится как

$$(\tau,\eta,\mu_0) \in g \quad (y,\mu)|_{t=\tau} = (\eta,\mu_0)$$

Непосредственно из теорем о непрерывности решения по начальным данным и дифференцируемости решения по начальным данным получаем следующие утверждения.

Теорема. *(о непрерывности решения по начальным данным и параметрам)*
Если g открыто в $\mathbb{R} \times Y^{n+m}$, $f(t,y,\mu)$ и $D_2(t,y,\mu)$ непрерывны на g, то $\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu)$, $(t,\tau,\eta,\mu) \in \widetilde{g}$ непрерывно дифференцируема на $\widetilde{g}$, кроме того, $D_2\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu)$ и $D_3\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu)$ непрерывно дифференцируемы по t.

Теорема. *Если g открыто в $\mathbb{R} \times Y^{n+m}$ и $f(t,y,\mu) \in C^k(g,Y^n)$, где $k \in \{1,2,\dots,\infty,a\}$, то $\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) \in C^k(\widetilde{g},Y^n)$. Кроме того, все смешанные производные порядка $s \le k$ непрерывно дифференцируемы по t.*

Аналогично формулируются следствия. Дополнительно к ним можно изучить производную по μ.

Следствие. *Пусть g открыто в $\mathbb{R} \times Y^{n+m}$ и функции f, $D_2 f$, $D_3 f$ непрерывны на g. Тогда $D_4\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu)$ – решение задачи Коши*

$$z = D_2 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu) z + D_3 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu)$$

$$z|_{t=\tau} = 0$$

Доказательство.

$$\forall\, (t,\tau,\eta,\mu) \in \widetilde{g} \quad D_1\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) = f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu)$$

$$D_4 D_1\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) = D_2 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu) D_4\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) + D_3 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu)$$

$$D_1 D_4\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) = D_2 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu) D_4\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu) + D_3 f(t,\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu),\mu)$$

При этом $D_4\widetilde{y}(t,\tau,\eta,\mu)|_{t=\tau} = 0$. □

Следует заметить, что однородной системой, соответсвующей системе из следствия при фиксированном значении μ, является система в вариациях.

Упражнение. Используя метод вариации произвольных постоянных, выразить решение $D_4\widetilde{y}$ через $D_3\widetilde{y}$ и $D_3 f(t,\widetilde{y})$.

Глава V. Автономные системы

§1. Основные понятия

В автономных системах независимую переменную принято обозначать t и дифференцирование по ней обозначают точкой.

$$\dot{y} = F(y) \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$y|_{t=t_0} = y_0 \quad (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times M \tag{2}$$

Множество M называют фазовым пространством. Областью задания автономной системы является $G = \mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. При изучении автономных систем считаем, что $F \in C(M, \mathbb{R}^n)$ и M открыто в $\mathbb{R}^n$. Из этих предположений следует существование решения любой задачи Коши. Дополнительно будем предполагать, что автономная система обладает свойством единственности. Таким образом, любая задача Коши имеет единственное максимально продолженное решение, обозначаемое $\widetilde{y}(t, t_0, y_0)$, $t \in I(t_0, y_0)$. Уже было доказано, что $I(t_0, y_0)$ открыто в $\mathbb{R}$ и имеет место теорема о непрерывности решения по начальным данным.

1°. Характеристическое свойство автономной системы

Теорема. *Пусть $y = \xi(t)$, $t \in J$ – (максимально продолженное) решение системы (1). Тогда для любого фиксированного $t_0 \in \mathbb{R}$ функция $y = \xi(t - t_0)$, $t \in t_0 + J$ также является (максимально продолженным) решением системы (1).*

Доказательство. Прямая подстановка показывает, что $\xi(t - t_0)$, $t \in t_0 + J$ – решение системы (1). Пусть $\xi(t)$ непродолжимо и предположим, что продолжимо "сдвинутое" решение, но тогда сдвинем обратно на $-t_0$ и получим продолжение первоначального решения, что противоречит его непродолжимости. □

Замечание. На самом деле, выполнено и следующее утверждение: если для каждого решения нормальной системы выполнено свойство, указанное в теореме, то система автономна.

Замечание. Если $\xi(t)$, $t \in J$ – решение задачи Коши с начальной точкой $(0, y_0)$, то $\xi(t + t_0)$, $t \in J - t_0$ – решение задачи Коши с начальной точкой (t_0, y_0). Поэтому при изучении задач Коши для автономных систем t_0 обычно полагают равным нулю.

2°. Движения, траектории и их классификация

Движением мы будем называть максимально продолженное решение автономной системы. Траекторией движения называется образ движения. Если $\xi(t)$, $t \in J$ – движение, то $\xi(t + t_0)$, $t \in J - t_0$ – движение и траектории этих движений совпадают. Часто траектории называют орбитами движения. Траектория движения есть также проекция графика интегральной кривой на M.

Классификация движений и траекторий

отображение $\xi(t)$, $t \in J$	движение $\xi(t)$, $t \in J$	траектория движения $\xi(t)$, $t \in J$
постоянные $J = \mathbb{R}$, $\exists p \in M : \xi(t) \equiv p$	покой	точка покоя $\{p\} \subset M$
периодические $J = \mathbb{R}$, $\exists \tau \neq 0 : \forall t \in \mathbb{R}\ \xi(t + \tau) = \xi(t)$	периодическое	замкнутая траектория (цикл)
непериодическое	непериодическое	незамкнутые

Теорема. *Точка $p \in M$ является точкой покоя тогда и только тогда, когда $F(p) = 0$*

Доказательство. p – точка покоя тогда и только тогда, когда $y = p$, $t \in \mathbb{R}$ – движение системы (1), что выполнено тогда и только тогда, когда $F(p) = 0$. □

Нули векторного поля F называют особыми точками, и, таким образом, особые точки – это точки покоя, и наоборот.

§ 2. Свойство единственности траектории. Критерий периодичности

Теорема. *Через любую точку $y_0 \in M$ проходит одна и только одна траектория.*

Доказательство. Через L_p обозначим траекторию движения $y = \xi(t)$, $t \in J$, $\xi(0) = p$. Точка $q \in L_p$ тогда и только тогда, когда $\exists \tau \in J : \xi(\tau) = q$. Обозначим через $\psi(t)$, $t \in I$ движение такое, что $\psi(\tau) = q$. Это решения одной задачи Коши и по свойству единственности $I = J$ и $\xi = \psi$. Рассмотрим движение $\psi(t+\tau)$, $t \in \tau + J$, с одной стороны его траекторией является L_q, с другой – L_p. Значит, $q \in L_p$, тогда $L_q = L_p$. Пусть $z \in L_q \cap L_p$ ($q \notin L_p$), тогда $L_q = L_z = L_p$. □

Из этого свойства следует, что через точки покоя движение, не являющееся покоем, проходить не может.

Теорема. *(Критерий периодичности)*
Пусть $\xi(t)$, $t \in J$ – движение системы (1) и $\exists t_1, t_2 \in J$ $t_1 \neq t_2$ такие, что $\xi(t_1) = \xi(t_2)$. Тогда $J = \mathbb{R}$ и $\xi(t + (t_2 - t_1)) = \xi(t)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $\xi(t)$, $t \in J$ – максимально продолженное решение. $\psi(t) = \xi(t + (t_2 - t_1))$, $t \in J - (t_2 - t_1)$. По свойству единственности они совпадают и, значит, $J - (t_2 - t_1) = J$. Последнее равенство возможно, лишь когда $J = \mathbb{R}$. □

Теорема. *Пусть $\xi(t)$, $t \in J$ – непериодическое движение, тогда $\xi : J \to \xi(J) \subset M$ является регулярным взаимно однозначным отображением.*

Доказательство. Если предположить, что $\dot{\xi}(t) = F(\xi(t)) = 0$, то по свойству единственности это движение является покоем. Предположим теперь, что $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$, $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ и по предыдущей теореме это движение есть периодическое. □

Всякая незамкнутая траектория есть простая, регулярная дуга в фазовом пространстве. Так как $J \to \xi(J)$ взаимно однозначно, то есть обратное отображение, но, вообще говоря, обратное отображение не является непрерывным. Таким образом, нельзя утверждать, что простая регулярная дуга гомеоморфна промежутку.

§ 3. Замкнутые траектории

Теорема. *Замкнутая траектория является регулярным, взаимно однозначным и взаимно непрерывным образом единичной сферы $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.*

Доказательство. Путь L – замкнутая траектория, описываемая ω-периодическим движением $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Фиксируем на единичной окружности точку с "нулевым углом" и будем от нее отсчитывать угол для любой точки на сфере, $\theta : S^1 \to [0, 2\pi)$ – отображение, реализующее это сопоставление. Определим $h(y) = \xi(\frac{\omega}{2\pi}\theta(y))$. Это отображение непрерывно и сюръективно. Пусть $y_1, y_2 \in S$, $y_1 \neq y_2$ и пусть $h(y_1) = h(y_2)$, то есть $\xi(\frac{\omega}{2\pi}\theta(y_1)) = \xi(\frac{\omega}{2\pi}\theta(y_2))$. Обозначим $\frac{\omega}{2\pi}\theta(y_1) = t_1$ и $\frac{\omega}{2\pi}\theta(y_1) = t_2$, тогда $t_1 \neq t_2$, $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ и $0 < |t_2 - t_1| < \omega$. Значит, по критерию периодичности получаем $\xi(t + (t_2 - t_1)) \equiv \xi(t)$, то есть $|t_2 - t_1|$ – период, но он строго меньше ω. Значит отображение h инъективно. Обратное отображение непрерывно, так как h – биективное отображение компактного пространства в хаусдорфово, значит, оно имеет непрерывное обратное. □

§ 4. Инвариантные множества

$$\dot{y} = F(y) \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n \quad M \text{ открыто} \quad F \in C(M, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Кроме того, система (1) обладает свойством единственности.

Определение. Множество $B \subset M$ называется положительно инвариантным множеством системы (1), если

$$y_0 \in B \Rightarrow \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty) \quad \widetilde{y}(t, 0, y_0) \in B$$

Соответственно, **отрицательно инвариантным**, если

$$y_0 \in B \Rightarrow \forall\, t \in I(0, y_0) \cap (-\infty, 0] \quad \widetilde{y}(t, 0, y_0) \in B$$

Если множество одновременно положительно и отрицательно инвариантно, то его называют **инвариантным**.

Легко видеть, что множества M и $\varnothing$ инвариантны, также инварианта любая траектория.

1°. Свойства инвариантных множеств

1) Любое объединение (в том числе бесконечное) инвариантных множеств инвариантно.

2) Любое пересечение (в том числе бесконечное) инвариантных множеств инвариантно.

3) Дополнение M до инвариантного множества инвариантно.

4) Замыкание инвариантного множества инвариантно.

   Доказательство. Для инвариантного множества $B = \varnothing$ утверждение очевидно, тогда будем считать, что $B \neq \varnothing$. Пусть $p \in \overline{B}$, значит, существует последовательность $p_n \in B$: $p_n \to p$ $(n \to \infty)$. Тогда $\widetilde{y}(t, 0, p_n) \in B$ и далее по теореме об интегральной непрерывности получаем требуемое утверждение. □

5) Граница инвариантного множества инвариантна.

   Доказательство. Следует из предыдущих свойств и равенства $\partial B = \overline{B} \cap \overline{M \backslash B}$ □

2°. Лемма о полутраектории, остающейся в компакте

Введем для краткости обозначение $g(t, y) = \widetilde{y}(t, 0, y)$, $t \in J(y) = I(0, y_0)$. Отметим некоторые свойства $g(t, y)$

1) $g(0, y) = y$.

2) $\widetilde{y}(t, t_0, y_0) = g(t - t_0, y_0)$, $t \in t_0 + J(y_0)$. Значит, g непрерывна.

3) $g(t - \tau, g(\tau, y)) = g(t, y)$.

Лемма. *(о полутраектории, остающейся в компакте)*
Пусть $g(t, y_0) \in K \subset M$, $t \in [0, +\infty) \cap J(y_0)$, K – компакт. Тогда правый конец $J(y_0)$ есть $+\infty$. Аналогичное утверждение верно и для $-\infty$.

Доказательство. От противного. Пусть $\beta < +\infty$ – правый конец $J(y_0)$. Кроме того, $g(t, y_0) \in K$ при $t \in [0, \beta)$. Рассмотрим множество $K^* = [0, \beta] \times K \subset B = \mathbb{R} \times M$. При этом, $(t, g(t, y_0)) \in K^*$ при $t \in [0, \beta)$ и K^* – компакт, что противоречит характеристическому свойству максимально продолженного решения. □

3°. Существование точек покоя в полуинвариантном диске

Шаром в $\mathbb{R}^n$ будем называть множество $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$. Любой объект, гомеоморфный шару, будем называть диском.

Теорема. *(Брауэра) Любое непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку.*

Теорема. *(о существовании точек покоя в полуинвариантном диске)*
Пусть D – положительно (отрицательно) инвариантный диск для системы (1), лежащий в M. Тогда система (1) имеет в D точку покоя.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для положительно инвариантного диска, доказательство для отрицательно инвариантного получается заменой t на $-t$. Выберем последовательность чисел $\omega_n \in \mathbb{R}$, $\omega_n > 0$, $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого n построим отображение $h_n : D \to D$, $h_n(y) = g(\omega_n, y)$. По лемме о полутраектории, остающейся в компакте, $h_n(D) \subset D$ при любом n и определение h_n корректно. Так как непрерывно g, то непрерывно и каждое h_n. При любом n существует $p_n \in D$ – неподвижная точка для h_n, то есть $g(\omega_n, p_n) = p_n = g(0, p_n)$. Если движение $g(t, p_n)$ – покой, то теорема доказана. Пусть $g(t, p_n)$ периодично с периодом ω_n, тогда $g(k\omega_n, p_n) = p_n$. Фиксируем $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Запишем t в виде $t = k_n\omega_n + t_n$, $0 \le t_n < \omega_n$.

$$g(t, p_n) = g(k_n\omega_n + t_n, p_n) = g(t_n, g(k_n\omega_n, p_n)) = g(t_n, p_n)$$

Теперь пусть $n \to +\infty$, выберем из последовательности $\{p_n\}$ сходящуюся подпоследовательность, пусть $p_n \to p_0$ и по непрерывности g получаем, что $g(t, p_0) = g(0, p_0) = p_0$. □

§ 5. Невырожденные точки покоя автономной системы

$$\dot{y} = F(y) \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n \quad M \text{ открыто} \quad F \in C^1(M, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Определение. Точка $p \in M$ называется **невырожденной (простой) точкой покоя** системы (1), если $F(p) = 0$ и $\det DF(p) \neq 0$.

Линеаризация системы (1) в точке покоя.

Пусть $p \in M$ – точка покоя системы (1), заменой $y = p + x$ перенесем начало координат в точку p и придем к системе $\dot{x} = F(x + p)$, $x \in M - p$. Далее, используя формулу Тейлора и учитывая, что $x = 0$ – точка покоя новой системы, приходим к

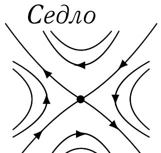
$$\dot{x} = F(p + x) = DF(p)x + g(x) \quad \|g(x)\| = o(\|x\|)$$

Переход от системы $\dot{x} = F(x + p)$ к $\dot{x} = DF(p)x$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ называется **линеаризацией**. После линеаризации получаем ОЛС с невырожденной матрицей. Следует ожидать, что при достаточных предположениях для исходной системы, характер поведения её решений и решений линеаризированной системы в окрестности точки p будет схож.

1°. Невырожденные точки покоя на плоскости

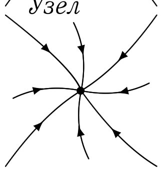
В этом пункте будем считать $n = 2$ и точка покоя находится в начале координат. Все рассуждения относятся лишь к малой окрестности точки покоя.

Седло



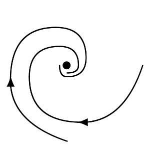
В точке покоя типа седло две траектории стремятся к точке покоя при $t \to +\infty$ (**устойчивые сепаратрисы**), еще две стремятся к точке покоя при $t \to -\infty$ (**неустойчивые сепаратрисы**), остальные траектории покидаю окрестность точки покоя как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$ и называются **гиперболическими**.

Узел



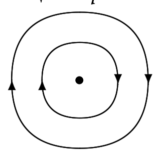
В точке покоя типа узел все траектории стремятся к точке покоя при $t \to +\infty$ (**устойчивый узел**) или стремятся к точке покоя при $t \to -\infty$ (**неустойчивый узел**). При этом закручивания траекторий вокруг точки покоя не происходит. Если какие-то из траекторий имеют в пределе общую касательную, то такую касательную часто называют **исключительный луч**.

Фокус



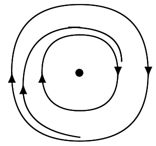
В точке покоя типа фокус все траектории стремятся к точке покоя при $t \to +\infty$ (**устойчивый фокус**) или стремятся к точке покоя при $t \to -\infty$ (**неустойчивый фокус**). При этом происходит закручивание траекторий вокруг точки покоя.

Центр



В точке покоя типа центр все траектории замкнуты, вращение по различным траекториям происходит в одном и том же направлении.

Центрофокус



В точке покоя типа центрофокус сколь угодно близко к точке покоя есть замкнутые траектории, между любыми двумя замкнутыми траекториями расположена сперaлевидная траектория. Один из концов сперaлевидной траектории накручивается изнутри на внешнюю замкнутую траекторию, другой – снаружи на внутреннюю.

Рассмотрим подробнее невырожденные точки покоя автономной системы $\dot{x} = Ax$ на плоскости.

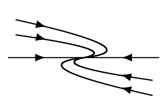
Случай вещественных собственных чисел

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – собственные числа матрицы A. Все собственные числа отличны от нуля, так как $\det A = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда существует невырожденная матрица S такая, что $S^{-1}AS = J$, где $J = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Сделаем в системе (1) замену $x = S\xi$ и перейдем к системе $\dot{\xi} = J\xi$. Такая замена представляет из себя линейное преобразование, что не повлияет на характер решений. Легко решая систему $\dot{\xi} = J\xi$, получаем $\xi_1 = C_1e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2 = C_2e^{\lambda_2 t}$. Рассмотрим решения, возникающие при различном выборе констант C_1 и C_2.
Если $C_1 = C_2 = 0$, то получаем саму точку покоя.
Если $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ ($C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$), то получаем лучи координатных осей.
Если $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то, выражая ξ_2 через ξ_1, получаем $\xi_2 = C_2(\frac{\xi_1}{C_1})^{\lambda_2/\lambda_1}$. Тогда в случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$ получаем семейство гипербол, при этом есть пара решений, стремящихся при $t \to +\infty$ к точке покоя по одной из координатных осей и пара решений, стремящихся при $t \to -\infty$ к точке покоя по другой координатной оси. В этом случае имеем точку покоя типа седло. Если же $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то также получаем, что траектории представляют из себя параболы, имеющие в пределе с общую касательную. При $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ получаем устойчивый (обыкновенный) узел, при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ – неустойчивый (обыкновенный) узел.

Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. В этом случае $A = J$ и есть два варианта либо $A = \lambda E$, либо $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$. В первом случае получаем, что траектории – лучи и вдоль каждого луча при $t \to +\infty$, если $\lambda < 0$ и при $t \to -\infty$, если $\lambda > 0$ к точке покоя стремиться одна траектория. Такой узел называется **дикритическим**. Во втором случае приходим к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \text{ откуда } \begin{cases} \xi_1 = (C_1 + tC_2)e^{\lambda t} \\ \xi_2 = C_2e^{\lambda t} \end{cases}$$



Несложно видеть, что в этом случае получаем узел, в общих чертах схожий с изображённым на рисунке узлом. При $\lambda < 0$ узел будет устойчивым, при $\lambda > 0$ неустойчивым. Все решения здесь имеют в пределе совпадающую касательную. Такой узел называется **жордановым** или, реже, **вырожденным**.

Случай невещественных собственных чисел

В этом случае жорданова форма матрицы A содержит два комплексно сопряженных собственных числа $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) матрицы A, матрица S, также не является вещественной. Переход к такой невещественной матрице сильно усложнил бы рассуждения. Поэтому осуществим переход к вещественной матрице $B = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. Действуя аналогично случаю вещественных собственных чисел, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 - \beta\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \beta\xi_1 + \alpha\xi_2 \end{cases}$$

Мы ожидаем получить колебательный режим и естественно будет перейти к полярным координатам: $\xi_1 = r\cos\varphi$, $\xi_2 = r\sin\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. После подстановки приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\varphi} = \beta \neq 0 \end{cases} \quad \text{решая, получаем} \quad \begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \varphi = \varphi_0 + \beta t \end{cases}$$

При $\alpha = 0$ траектории представляют из себя окружности, то есть получаем точку покоя типа центр, $\alpha \neq 0$ – логарифмические спирали, при $\alpha\beta > 0$ получаем неустойчивый фокус, при $\alpha\beta < 0$ – устойчивый.

Среди невырожденных точек покоя линеаризированной автономной системы мы не встретили центрофокус, это не является особенностью лишь автономных однородных линейных систем, появление точки покоя типа центрофокус невозможно, если F аналитична.

Крайне важен вопрос о возможных изменениях типа точки покоя при введении в автономную систему малой добавки: переходе от системы $\dot{y} = F(y)$ к $\dot{y} = F(y) + \varepsilon(y)$. Здесь наиболее интересна "задача центра и фокуса": задача о переходе точки покоя типа центр в точку типа фокус. По существу, эта задача не решена и, скорее всего, неразрешима: нельзя в общем случае за конечное число действий ответить на этот вопрос. Точка покоя типа седло переходит в точку типа седло даже при линейных добавках. Обыкновенный узел переходит в обыкновенный узел с сохранением типа устойчивости. Тоже и для фокуса. Дикритический и жорданов узлы могут перейти в обыкновенный узел или фокус с сохранением типа устойчивости. Однако переход в фокус невозможен уже при $F \in C^2$.

Глава VI. Устойчивость по Ляпунову

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad f \in C(G, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

§ 1. Основные понятия

Определение. Решение $\xi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) называется **устойчивым**, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что из $\|y_0 - \xi(t_0)\| < \delta$ следует существование решения $\psi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ задачи Коши с начальной точкой (t_0, y_0) и $\|\psi(t) - \xi(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Решение ξ называется **неустойчивым**, если оно не является устойчивым. Решение ξ называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и $\exists \Delta > 0$ такое, что из $\|y_0 - \xi(t_0)\| < \Delta$ следует существование решения $\psi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ задачи Коши с начальной точкой (t_0, y_0) и $\|\psi(t) - \xi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание. Решения устойчивые, но не являющиеся асимптотически устойчивыми часто называют **нейтрально устойчивыми**.

Упражнение. Показать, что для уравнения $\dot{y} = y(y-1)$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $t_0 = 0$ решение $y \equiv 0$ является асимптотически устойчивым, а решение $y \equiv 1$ – неустойчивым.

Пусть $\xi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ – решение системы (1). Рассмотрим систему

$$G_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \ t \in [t_0, +\infty) \ (t, \xi(t) + x) \in G\}$$

$$\dot{x} = h(t, x) \quad (t, x) \in G_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad h(t, x) = f(t, \xi(t) + x) - f(t, \xi(t)) \tag{1_0}$$

Система такого вида уже возникала в Гл.II §11 2°.

Теорема. *Тип устойчивости решения $\xi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) совпадает с типом устойчивости нулевого решения системы (1_0).*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы о разности двух решений, обсуждавшейся в Гл.II §11 2°. □

Ввиду последней теоремы можно изучать вопросы устойчивости лишь нулевого решения. При этом, конечно, при рассмотрении определенного класса систем (1) необходимо предварительно перейти к рассмотрению соответствующего класса систем (1_0) и для них изучать устойчивость нулевого решения.

§ 2. Устойчивость решения линейных систем

$$\dot{y} = P(t)y + q(t) \quad I = \langle \alpha, +\infty) \quad (t, y) \in G = I \times \mathbb{R}^n \quad P(t), q(t) \text{ непрерывны на } I \quad t_0 \in I \quad (1)$$

$$\dot{y} = P(t)y \quad (t, y) \in G = I \times \mathbb{R}^n \quad (2)$$

1°. Характеристическое свойство решений линейной системы с точки зрения устойчивости

Теорема. *Любое решение $\xi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) имеет тот же тип устойчивости, что и нулевое решение системы (2) на $[t_0, +\infty)$.*

Доказательство. В случае линейной системы $f(t, y) = P(t)y + q(t)$. Опираясь на теорему предыдущего параграфа, вычислим функцию $h(t, y)$.

$$h(t, y) = f(t, \xi(t) + y) - f(t, \xi(t)) = (P(t)(\xi(t) + y) + q(t)) - (P(t)\xi(t) + q(t)) = P(t)y$$

Таким образом, приходим к системе (2), что и завершает доказательство. □

А значит, любые два решения линейной системы имеют один тип устойчивости. Поэтому тип устойчивости часто приписывают самой линейной системе, а не конкретному её решению.

2°. Критерий устойчивости однородной линейной системы

Теорема. *(критерий устойчивости ОЛС)*
Следующие утверждения равносильны

1) *Нулевое решение устойчиво.*

2) *Любое решение ограничено на $[t_0, +\infty)$.*

3) *Любая ФМР ограничена на $[t_0, +\infty)$.*

4) *Существует ФМР ограниченная на $[t_0, +\infty)$.*

Доказательство. Доказательство проведем по циклу $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.
$(1) \Rightarrow (2)$: Взяв в определении устойчивости $\varepsilon = 1$, найдем $\delta > 0$ такое, что из $\|y_0\| < \delta$ следует существование решения $\psi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ задачи Коши с начальной точкой (t_0, y_0) и $\|\psi(t)\| < 1$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Таким образом, мы уже получили ограниченность любого решения с начальной точкой (t_0, y_0), где $\|y_0\| < \delta$. Рассмотрим решение $\varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ задачи Коши с начальной точкой (t_0, p). Выберем $\alpha \in \mathbb{R}^+$ так, что $\|\alpha p\| < \delta$, например $\alpha = \delta/2\|p\|$ и рассмотрим функцию $\psi(t) = \alpha\varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$. Функция ψ является решением задачи Коши с начальной точкой $(t_0, \alpha p)$, а тогда $\|\psi(t)\| < 1$, откуда выводим $\|\varphi(t)\| < 1/\alpha$ при $t \in [t_0, +\infty)$.
$(2) \Rightarrow (3)$: Столбцы ФМР есть решения системы и из ограниченности любого решения следует ограниченность ФМР.
$(3) \Rightarrow (4)$: Очевидно.
$(4) \Rightarrow (1)$: Пусть $\Phi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ – ограниченная ФМР, значит $\|\Phi(t)\| \leq K$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Берем $\varepsilon > 0$, пусть $\varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ – решение системы. Так как $\Phi(t)$ – ФМР, то $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\varphi(t_0)$, значит, $\|\varphi(t)\| = \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\varphi(t_0)\| \leq K\|\Phi^{-1}(t_0)\|\|\varphi(t_0)\|$. Выбирая, $\|\varphi(t_0)\| < \delta = \frac{\varepsilon}{K\|\Phi^{-1}(t_0)\|}$, получим $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Что и говорит об устойчивости нулевого решения. □

Теорема. *(критерий неустойчивости ОЛС)*
Следующие утверждения равносильны

1) *Нулевое решение неустойчиво.*

2) *Существует решение неограниченное при $t \to +\infty$.*

3) *Существует ФМР неограниченная при $t \to +\infty$.*

4) *Любая ФМР неограничена при $t \to +\infty$.*

3°. Критерий асимптотической устойчивости однородной линейной системы

Теорема. *(критерий асимптотической устойчивости ОЛС)*
Следующие утверждения равносильны

1) *Нулевое решение асимптотически устойчиво.*
2) *Любое решение стремится к нулю при $t \to +\infty$.*
3) *Любая ФМР стремится к нулевой матрице при $t \to +\infty$.*
4) *Существует ФМР, стремящаяся к нулевой матрице при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Цепочка импликаций $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ доказывается аналогично соответствующим импликациям в критерии устойчивости ОЛС.
$(4) \Rightarrow (1)$: Условие (4) влечет ограниченность ФМР $\Phi(t)$, значит, по критерию устойчивости ОЛС нулевое решение устойчиво. Кроме того, любое решение $\varphi(t)$ может быть записано в виде $\varphi(t) = \Phi(t)C$, значит $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то есть вообще любое решение стремиться к нулевому. □

§ 3. Устойчивость решений автономной однородной линейной системы

$$\dot{y} = Ay \quad (t, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Для системы (1) выполнены теоремы предыдущего параграфа. Пусть J – жорданова нормальная форма матрицы A с матрицей перехода S, то есть $J = S^{-1}AS$, $\det S \neq 0$.

Лемма. *Матричные функции e^{tA} и e^{tJ}, $t \in [0, +\infty)$ являются одновременно ограниченными, неограниченными или стремящимися к нулю.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из равенств $e^{tJ} = S^{-1}e^{tA}S$ и $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$. □

Лемма дает возможность в вопросах устойчивости рассматривать не матрицу e^{tA}, а матрицу e^{tJ}, чья структура значительно проще. Обозначим через $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ множество собственных чисел матрицы A, которые, вообще говоря, комплексные числа.

Некритический случай:

Теорема. *Если $\forall\, j = 1, \ldots, n$ $Re\lambda_j < 0$, то система (1) асимптотически устойчива.*

Доказательство. Матрица e^{tJ} представляет из себя блочно диагональную матрицу, составленную из жордановых блоков, $e^{tJ} = \operatorname{diag}\{\ldots, e^{tJ_{r_k}(\lambda_k)}, \ldots\}$. Рассмотрим отдельно жорданов блок $e^{tJ_{r_k}}(\lambda_k)$.

$$e^{tJ_{r_k}(\lambda_k)} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & & & \frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{t^s}{s!}e^{t\lambda_k}\right| = \frac{t^s}{s!}\left|e^{t\lambda_k}\right| = \frac{t^s}{s!}e^{tRe\lambda_k} \to 0 \text{ при } t \to +\infty$$

Каждая жорданова клетка стремиться к нулю, значит, $e^{tJ} \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда по лемме и $e^{tA} \to 0$ при $t \to +\infty$. □

Теорема. *Если $\exists\, j = 1, \ldots, n$ $Re\lambda_j > 0$, то система (1) неустойчива.*

Доказательство. Доказывается аналогично предыдущей теореме. □

Критический случай:
Жордановы клетки 1×1 будем называть простыми.

Теорема. *Пусть $\forall\, j = 1, \dots, n$ $Re\lambda_j \le 0$, но $\exists\, k = 1, \dots, n$ $Re\lambda_k = 0$. Если всем λ_k таким, что $Re\lambda_k = 0$ соответствуют простые жордановы клетки, то система (1) нейтрально устойчива. В противном случае – неустойчива.*

Доказательство. Все элементы матрицы e^{tJ} имеют вид $\frac{t^s}{s!}e^{t\lambda_j}$, причем множитель $\frac{t^s}{s!}$ при $e^{t\lambda_j}$ появляется тогда и только тогда, когда жорданова клетка не простая. Откуда легко получаем утверждение теоремы. $\square$

§ 4. Теорема об асимптотической устойчивости по первому приближению

$$\dot{y} = P(t)y + g(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad G \text{ открыто} \quad P(t), g(t, y) \text{ непрерывны} \tag{1}$$

Дополнительно предположим, что система (1) обладает свойством единственности. Пусть $(t, 0) \in G$ и $g(t, 0) = 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда $y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ является решением системы (1). Наряду с (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = P(t)y \quad J = [t_0, +\infty) \quad (t, y) \in G \subset J \times \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Пусть $\widetilde{\Phi}(t, \tau)$, $(t, \tau) \in J \times J$ – матрица Коши системы (2).

Теорема. *Пусть существуют положительные числа K и σ такие, что*

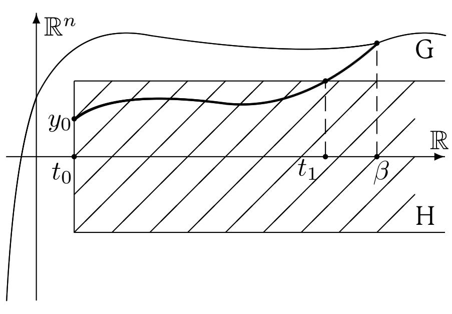
$$\|\widetilde{\Phi}(t, \tau)\| \le Ke^{-\sigma(t-\tau)} \text{ при } t_0 \le \tau \le t < +\infty$$

и пусть существуют положительные числа a и l такие, что

$$H = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in [t_0, +\infty)\ \|y\| \le a\} \subset G \text{ и } \|g(t, y)\| \le l\|y\| \text{ при } (t, y) \in H$$

Тогда если $l < \sigma/K$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\|y_0\| < a$ и максимально продолженное вправо решение $\xi(t)$, $t \in [t_0, \beta) = I$ задачи Коши системы (1) с начальной точкой (t_0, y_0).



Вообще говоря, непродолжимость решения ξ еще не гарантирует нам, что $\beta = +\infty$, одна из возможных ситуаций схематически изображена на чертеже. Рассмотрим два случая: если решение ξ не покидает H, то по характеристическому свойству непродолжимого решения получаем, что $\beta = +\infty$, если ξ покидает H, то существует первый момент t_1 выхода решения на боковую стенку цилиндра H, то есть $(t, \xi(t)) \in \operatorname{int} H$ при $t \in (t_0, t_1)$ и $(t_1, \xi(t_1)) \in \partial H$, $\|\xi(t_1)\| = a$. Определим функцию $q(t) = g(t, \xi(t))$, $t \in J_0$, где $J_0 = [t_0, t_1]$, если решение ξ покидает H и $J_0 = [t_0, +\infty)$, если ξ не покидает H.

$$\dot{y} = P(t)y + q(t) \quad (t, y) \in J_0 \times \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Функция $\xi(t)$, $t \in J_0$ будет не только решением системы (1), но и решением системы (3). Линейная система (3) обладает свойством единственности, а значит, любая функция, решающая задачу Коши с начальной точкой (t_0, y_0), будет совпадать на J_0 с функцией ξ. Используя теперь метод вариации произвольных постоянных, получаем

$$\xi(t) = \widetilde{\Phi}(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{\Phi}(t, \tau)q(\tau)d\tau \quad t \in J_0$$

$$\|\xi(t)\| \le Ke^{-\sigma(t-t_0)}\|y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} Ke^{-\sigma(t-\tau)}\|q(\tau)\|d\tau \right|$$

Учитывая, что $\|q(\tau)\| = \|g(\tau, \xi(\tau))\| \le l\|\xi(\tau)\|$, $t_0 \le \tau \le t \le t_1$, получаем

$$\|\xi(t)\| \le Ke^{-\sigma(t-t_0)}\|y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} Kle^{-\sigma(t-\tau)}\|\xi(t)\|d\tau \right| \quad t \in J_0$$

Домножим последнее неравенство на $e^{\sigma(t-t_0)}$ и введем $u(t) = \|\xi(t)\|e^{\sigma(t-t_0)}$

$$0 \le u(t) \le K\|y_0\| + lK \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \right| \quad t \in J_0$$

Теперь применив к $u(t)$ лемму Гронуолла, получим $u(t) \le K\|y_0\|e^{lK(t-t_0)}$

$$\|\xi(t)\|e^{\sigma(t-t_0)} \le K\|y_0\|e^{lK(t-t_0)}$$

$$\|\xi(t)\| \le K\|y_0\|e^{(lK-\sigma)(t-t_0)} \quad t \in J_0 \tag{4}$$

Так как $l < \sigma/K$, то $lK - \sigma < 0$ и $\|\xi(t)\| \le K\|y_0\|$ при $t \in J_0$. Таким образом, если $\|y_0\| < \Delta = a/2K$, то $\|\xi(t)\| < a/2$ при $t \in J_0$, то есть, на самом деле, решение ξ не покидает H и $\beta = +\infty$. При таком выборе y_0 из (4) следует, что $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Проверим, теперь устойчивость нулевого решения. По $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min\{\Delta, \varepsilon/K\}$ теперь, если $\|y_0\| < \delta$, то $\|\xi(t)\| \le K\delta \le \varepsilon$. □

§ 5. Теорема об устойчивости по линейному приближению

$$\dot{y} = Ay + g(t, y) \quad (t, y) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad G \text{ открыто} \quad P(t), g(t, y) \text{ непрерывны} \tag{1}$$

Дополнительно предположим, что система (1) обладает свойством единственности. Пусть $(t, 0) \in G$ и $g(t, 0) = 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда $y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ является решением системы (1). Кроме того, будем считать, что

$$\frac{\|g(t, y)\|}{\|y\|} \rightrightarrows 0 \text{ на } [t_0, +\infty) \text{ при } \|y\| \to 0 \tag{2}$$

Если $\Phi(t) = e^{tA}$ – ФМР системы $\dot{y} = Ay$, то матрица Коши запишется как $\widetilde{\Phi}(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$. Имея ввиду применение теоремы предыдущего параграфа, получим оценку нормы матричной экспоненты.

1°. Оценка матричной экспоненты

Лемма. *Если все собственные числа матрицы B имеют отрицательные вещественные части, то $\exists K \ge 1$ такое, что $\|e^{tB}\| \le K$ при $t \in [0, +\infty)$*

Доказательство. Рассмотрим систему $\dot{y} = By$. Из отрицательности вещественных частей собственных чисел следует, что все решения асимптотически устойчивы, а значит, ФМР этой системы e^{tB} ограничена. То, что $K \ge 1$ легко получаем при $B = 0$. □

Теорема. *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A и $\sigma > \max_i\{Re\lambda_i\}$, то $\exists K \ge 1$ такое, что $\|e^{tA}\| \le Ke^{\sigma t}$ при $t \in [0, +\infty)$.*

Доказательство. Пусть $B = A - \sigma E$. Тогда собственное число матрицы B запишется как $\mu_i = \lambda_i - \sigma$ и $Re\mu_i = Re\lambda_i - \sigma < 0$. Значит, $\exists K \ge 1$ такое, что $\|e^{tB}\| \le K$ при $t \in [0, +\infty)$. Далее $e^{tA} = e^{tB + t\sigma E} = e^{tB}e^{t\sigma E} = e^{tB}e^{t\sigma}E$, а значит, $\|e^{tA}\| = \|e^{tB}\|e^{t\sigma} \le Ke^{t\sigma}$. □

2°. Теорема об устойчивости по линейному приближению

Теорема. *Если вещественные части всех собственных чисел матриц A отрицательны, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Выведем это утверждение из теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению. Рассмотрим систему $\dot{y} = Ay$, $(t, y) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Матрица Коши этой системы $\widetilde{\Phi}(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$. Так как все вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны, то $\exists \sigma$ такое, что $\max_i\{Re\lambda_i\} < \sigma < 0$, тогда $\|\widetilde{\Phi}(t, \tau)\| \le Ke^{-|\sigma|(t-\tau)}$ и условие на матрицу Коши из теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению выполнено. Теперь выберем l так, что $0 < l < -\sigma/K$, затем выберем a, $0 < a < r$ столь малым, что $\frac{\|g(t,y)\|}{\|y\|} \le l$ при $t \in [t_0, +\infty)$ и $\|y\| \le a$. Существование такого a следует из равномерного стремления к нулю. Теперь выполнены все условия теоремы об асимптотической устойчивости по первому приближению, а значит, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. □

Теорема. *(Без доказательства)*
Если среди собственных чисел матрица A есть число с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

3°. Об устойчивости точек покоя автономной системы

$$\dot{y} = F(y) \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times M \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(M, \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

Пусть дополнительно система (3) обладает свойством единственности и $F(p) = 0$, $p \in M$.

Теорема. *Если вещественные части всех собственных чисел матрицы $DF(p)$ отрицательны, то решение $y \equiv p$ асимптотически устойчиво, если существует собственное число с положительной вещественной частью – неустойчиво.*

Доказательство. Заменой $y = p + x$ перейдем к системе $\dot{x} = F(p + x) = DF(p)x + g(x)$, $x \in M - p$, где $\|g(x)\| = o(\|x\|)$. Несложно видеть, что выполнены условия двух последних теорем. □

Глава VII. Стационарные интегралы автономной системы

$$\dot{y} = F(y) \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times M \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F \in C(M, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

1°. Определение стационарного интеграла автономной системы и его свойства

Определение. Пусть D открыто в M. Функция $U \in C(D, \mathbb{R})$ называется стационарным интегралом системы (1) на D, если для любого решение $y = \varphi(t)$, $t \in I$ такого, что $\varphi(I) \subset D$ выполнено $U(\varphi(t)) \equiv \text{const}$ при $t \in I$.

В качестве U можно взять постоянную функцию, но этот тривиальный случай не представляет интереса и будет естественно исключен из рассмотрения в следующем пункте. Кроме того, будем рассматривать лишь непрерывно дифференцируемые функции U. Такой выбор объясняется следующей теоремой.

Теорема. *(критерий стационарного интеграла)*
Функция $U \in C^1(D, \mathbb{R})$ является стационарным интегралом систем (1) на связном D тогда и только тогда, когда $DU(y)F(y) \equiv 0$ на D.

Доказательство. Пусть U стационарный интеграл системы (1). Фиксируем $y_0 \in D$ и рассмотрим решение $\varphi(t)$, $t \in I = (-\delta, +\delta) : \varphi(I) \subset D$ задачи Коши с начальной точкой $(0, y_0)$. При этом $U(\varphi(t)) \equiv \text{const}$ на I, продифференцируем последнее равенство по t и получим $DU(\varphi(t))F(\varphi(t)) \equiv 0$ на I. Наконец, при $t = 0$ получим $DU(y_0)F(y_0) = 0$, а точка y_0 выбиралась в D произвольно.

Обратно, пусть $DU(y)F(y) \equiv 0$ на D. Рассмотрим решение $y = \varphi(t)$, $t \in I$ такое, что $\varphi(I) \subset D$.

$$DU(\varphi(t))F(\varphi(t)) \equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(U(\varphi(t))) \equiv 0 \Rightarrow U(\varphi(t)) \equiv \mathrm{const}$$

□

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Несложно видеть, что $U(x, y) = x^2 + y^2$ – стационарный интеграл этой системы. Значит, траектория любого решения системы есть окружность или точка.

2°. Независимый стационарный интеграл

Определение. Семейство функций $\{U_j\}_{j=1}^{k} \subset C^1(D, \mathbb{R})$ называется **независимым в точке** $x_0 \in D$, если векторы $\{DU_j(x_0)\}_{j=1}^{k}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Соответственно **независимым на** D, если оно независимо в каждой точке множества D.

Ясно, что при $k > n$ любое семейство функций $\{U_j\}_{j=1}^{k}$ зависимо в каждой точке. Элементарным примером может служить семейство $\{U_j(x) = x_j\}_{j=1}^{n} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ независимое на $\mathbb{R}^n$.

Так как речь идет о непрерывно дифференцируемых функциях, то из независимости в точке следует независимость и в некоторой окрестности точки. Имеет место также следующий факт, доказываемый в курсе анализа.

Теорема. *Если непрерывно дифференцируемые функции $U_1(y), \ldots, U_k(y)$ независимы в точке y_0, а $U(y), U_1(y), \ldots, U_k(y)$ зависимы в некоторой окрестности точки y_0, то существует непрерывно дифференцируемая Φ такая, что $U(y) = \Phi(U_1(y), \ldots, U_k(y))$ в некоторой окрестности точки y_0.*

Теорема. *Если $F \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$, $y_0 \in M$ и $F(y_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки y_0 существует $n-1$ независимых интегралов системы (1).*

Замечание. Столь жесткие требования теоремы сделаны лишь для упрощения записей. Из доказательства будет видно, что достаточно потребовать непрерывную дифференцируемость $F(y)$ в некоторой окрестности точки y_0.

Доказательство. Так как $F(y_0) = (F_1(y_0), \ldots, F_n(y_0)) \neq 0$, то можно не теряя общности считать, что $F_1(y_0) \neq 0$ в некотором шаре G с центром в y_0 и таком, что $\overline{G} \subset M$. Далее рассмотрим систему

$$\frac{dy_j}{dy_1} = \frac{F_j(y)}{F_1(y)} \quad j = 2, \ldots, n \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

и введем обозначения $\widehat{F} = (F_2, \ldots, F_n)$, $z = (y_2, \ldots, y_n)$. Зафиксируем y_{10}, $z_0 = (y_{20}, \ldots, y_{n0})$ и применим к этой системе теорему о дифференцируемости решения по начальным данным (здесь обозначения повторяют обозначения вышеупомянутой теорему с заменой t на y_1, t_0 на y_{10} и y_0 на z_0)

$$\widetilde{z}(y_1, y_{10}, z_0) \quad (y_1, y_{10}, z_0) \in \widetilde{G} \quad \widetilde{z} \in C^1(\widetilde{G}, \mathbb{R}^{n-1})$$

$$D_2\widetilde{z}(y_1, y_{10}, z_0) + D_3\widetilde{z}(y_1, y_{10}, z_0)\frac{\widehat{F}(y_{10}, z_0)}{F_1(y_{10}, z_0)} \equiv 0$$

$$D_2\widetilde{z}(y_1, y_{10}, z_0)F_1(y_{10}, z_0) + D_3\widetilde{z}(y_1, y_{10}, z_0)\widehat{F}(y_{10}, z_0) \equiv 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y_{j0}}(y_1, y_{10}, \ldots, y_{n0})F_j(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \equiv 0$$

Произведем теперь переобозначения $y_{j0} \to y_j$ и получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y_j}(y_1, \ldots, y_n) F_j(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$$

Таким образом, функции

$$U_j(y_1, \ldots, y_n) = \widetilde{z}_j(y_{10}, y_1, \ldots, y_n) \quad j = 2, \ldots, n$$

являются интегралами системы (1). По следствию теоремы о дифференцируемости по начальным данным матрица $\left(\frac{\partial \widetilde{z}_i}{\partial y_j}\right)$ невырождена, значит, интегралы U_j независимы. $\square$

3°. Следствие о решении уравнения в частных производных

$$\frac{\partial U(y)}{\partial y_1} F_1(y) + \ldots + \frac{\partial U(y)}{\partial y_n} F_n(y) = 0 \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F_j \in C^1(M, \mathbb{R}) \quad (*)$$

Теорема. *Пусть $y_0 \in M$, $F_j(y_0)$ одновременно не равны нулю. Тогда в некоторой окрестности точки y_0 в M существует $n-1$ независимых решений $U_1(y), \ldots, U_{n-1}(y)$ уравнения $(*)$ и любое другое решение в некоторой окрестности точки y_0 представляется в виде $U(y) = \Phi(U_1(y), \ldots, U_{n-1}(y))$, где Φ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция.*

4°. Понижение размера системы с помощью независимых интегралов

Пусть $U_1(y), \ldots, U_k(y)$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ – независимые интегралы системы (1) в окрестности точки $y_0 \in M$ и $F(y_0) = (F_1(y_0), \ldots, F_n(y_0)) \neq 0$. В системе (1) произведем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} z_1 = U_1(y) \\ \ldots \\ z_k = U_k(y) \\ z_{k+1} = y_{k+1} \\ \ldots \\ z_n = y_n \end{cases}$$

Такая замена невырождена ввиду линейной независимости в окрестности точки y_0 векторов $DU_1(y), \ldots, DU_k(y)$. При этом, в новых переменных система запишется как

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \ldots \\ \dot{z}_k = 0 \\ \dot{z}_{k+1} = F_{k+1}(y_1, \ldots, y_n) = \widetilde{F}_{k+1}(z_1, \ldots, z_n) \\ \ldots \\ \dot{z}_n = F_n(y_1, \ldots, y_n) = \widetilde{F}_n(z_1, \ldots, z_n) \end{cases}$$

Глава VIII. Периодические однородные линейные системы. Теорема Флоке

$$\dot{y} = P(t)y \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \quad P(t) \text{ – непрерывна на } \mathbb{R} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\ P(t + \omega) = P(t) \qquad (1)$$

1°. Матрица монодромии и мультипликаторы линейных систем

Определение. Число $\mu \in \mathbb{C}$ называется мультипликатором системы (1), если существует ненулевое решение $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, t \in \mathbb{R}\ \varphi(t + \omega) = \mu\varphi(t)$.

Через $\Phi_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$ обозначим ФМР системы (1) такую, что $\Phi_0(0) = E$, ясно, что такая ФМР существует и единственна.

Определение. Матрица $M = \Phi_0(\omega)$ называется матрицей монодромии системы (1).

Заметим, что имеют место следующие очевидные утверждения.

Теорема. *Если $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – решение системы (1), то $\xi(t+\omega)$, $t \in \mathbb{R}$ также является решением системы (1).*

Теорема. *Если $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – ФМР системы (1), то $\Phi(t+\omega)$, $t \in \mathbb{R}$ также является ФМР системы (1).*

Следствие. *Если $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – ФМР системы (1), то существует постоянная матрица S такая, что $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)S$.*

Такую матрицу S обычно называют основной матрицей для ФМР $\Phi(t)$ системы (1).

Следствие. *Матрица монодромии является основной матрицей для $\Phi_0(t)$.*

Доказательство. Рассматривая равенство $\Phi_0(t+\omega) = \Phi_0(t)S$ при $t = 0$, получим требуемое равенство $\Phi_0(\omega) = \Phi_0(0)S = S$. □

Теорема. *Любая основная матрица подобна матрице монодромии.*

Доказательство. Пусть $\Phi(t)$ – ФМР системы (1), существует матрица K такая, что $\Phi(t) = \Phi_0(t)K$, а тогда приходим к равенствам

$$\Phi(t+\omega) = \Phi_0(t+\omega)K \quad \Rightarrow \quad \Phi(t)S = \Phi_0(t)MK \quad \Rightarrow \quad \Phi_0(t)KS = \Phi_0(t)MK$$

последнее из которых при $t = 0$ даст $KS = MK$, значит, $S = K^{-1}MK$. □

Теорема. *Мультипликаторы системы (1) и только они являются собственными числами матрицы монодромии.*

Замечание. По предыдущей теореме собственные числа матрицы монодромии совпадают с собственными числами любой основной матрицы.

Доказательство. Пусть μ – мультипликатор системы (1), тогда существует ненулевое решение $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что $\varphi(t+\omega) = \mu\varphi(t)$. Система (1) имеет тождественно нулевое решение и обладает свойством единственности, значит, $s = \varphi(0) \neq 0$.

$$\varphi(t+\omega) = \Phi_0(t+\omega)s \quad \Rightarrow \quad \mu\varphi(t) = \Phi_0(t+\omega)s \;|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad \mu s = Ms$$

Несложно обратить рассуждения и получить доказываемое утверждение. □

2°. Теорема Флоке

Лемма. *(без доказательства)*
Пусть $B \in \mathbb{C}^n_n$ – невырожденная матрица, тогда существует матрица $K \in \mathbb{C}^n_n$ такая, что $B = e^K$.

Теорема. *(Теорема Флоке)*
Существуют невырожденная ω-периодическая матрица $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и постоянная матрица $\Lambda \in \mathbb{C}^n_n$ такие, что $\Phi_0(t) = U(t)e^{t\Lambda}$ и $U(0) = E$.

Доказательство. Матрица монодромии M невырождена, значит, существует матрица K такая, что $e^K = M$. Положим $\Lambda = \frac{1}{\omega}K$ и $\Phi_0(t) = U(t)e^{t\Lambda}$.

$$U(t+\omega) = \Phi_0(t+\omega)e^{-t\Lambda-\omega\Lambda} = \Phi_0(t)Me^{-t\Lambda-\omega\Lambda} = \Phi_0(t)e^{\omega\Lambda}e^{-t\Lambda-\omega\Lambda} = \Phi_0(t)e^{-t\Lambda} = U(t)$$

При этом, конечно, $U(0) = E$. □

Глава IX. Устойчивость по Ляпунову (второй метод Ляпунова)

$$\dot{x} = Q(x) \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \widetilde{M} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad Q \in C(\widetilde{M}, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

Дополнительно будем предполагать, что выполнено свойство единственности.

§1. Теоремы об устойчивости и неустойчивости

1°. Первая теорема Ляпунова

Определение. Функция $v \in C(U, \mathbb{R})$ называется:

- определённо положительной, если $\forall\, x \in U \backslash \{0\}$ $v(x) > 0$,
- определённо отрицательной, если $\forall\, x \in U \backslash \{0\}$ $v(x) < 0$,
- знакоположительной, если $\forall\, x \in U$ $v(x) \geq 0$,
- знакоотрицательной, если $\forall\, x \in U$ $v(x) \leq 0$.

Теорема. *(Теорема Ляпунова об устойчивости)*
Если существует U – окрестность нуля в $\widetilde{M}$ и определенно положительная функция $v \in C^1(U, \mathbb{R})$ такая, что $v(0) = 0$ и её производная $\dot{v}(x)$ в силу системы (1) знакоотрицательна, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, выберем $r < \varepsilon$: $\overline{D_r(0)} \subset U$. Малый шар $D_r(0)$ обозначим кратко D, $l = \inf_{x \in \partial D}\{v(x)\} > 0$. Выберем теперь $0 < \delta < r$ так, что $v(x) < l$ при $\|x\| < \delta$. Такой выбор δ возможен, так как $v(x) \to 0$ при $x \to 0$. Рассмотрим $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|x_0\| < \delta$ и непродолжимое вправо решение $x(t)$, $t \in [0, \beta)$ задачи Коши с начальной точкой $(0, x_0)$. Пусть существует $t^* \in (0, \beta)$: $\|x(t)\| < r$ при $t \in [0, t^*)$ и $\|x(t^*)\| = r$. Введем дифференцируемую функцию $g(t) = v(x(t))$, $t \in [0, t^*]$.

$$\dot{g}(t) = Dv(x(t))Q(x(t)) = \dot{v}(x(t)) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g(t^*) \leq g(0)$$

$$l \leq v(x(t^*)) \leq v(x(0)) = v(x_0) < l$$

Таким образом, решение остается в шаре $\overline{D}$, значит, решение должно находиться в компакте $[0, \beta] \times \overline{D}$, откуда следует, что $\beta = +\infty$ и нулевое решение устойчиво по Ляпунову. □

2°. Вторая теорема Ляпунова

Теорема. *(Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости)*
Если существует U – окрестность нуля в $\widetilde{M}$ и определенно положительная функция $v \in C^1(U, \mathbb{R})$ такая, что $v(0) = 0$ и её производная $\dot{v}(x)$ в силу системы (1) определенно отрицательна, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. По предыдущей теореме нулевое решение устойчиво по Ляпунову. Докажем, что решения притягиваются к нулевому. Выберем $a > 0$ такое, что $\overline{D_a(0)} \subset U$. Существует $Delta \in (0, a)$ такое, что если $\|x_0\| < \Delta$, то решение $x(t)$ задачи Коши с начальной точкой $(0, x_0)$ определено на $[0, +\infty)$ и $\|x(t)\| < a$ при $t \in [0, +\infty)$. Если $x_0 = 0$, то доказываемое очевидно, далее $x_0 \neq 0$. Пусть $g(t) = v(x(t)) > 0$, $t \in [0, +\infty)$, при этом, $\dot{g}(t) = \dot{v}(x(t)) < 0$, $t \in [0, +\infty)$. Функция $g(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу, значит, существует $\lim_{t \to +\infty} g(t) = \alpha \geq 0$.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$. Так как $v(x) \to 0$ при $x \to 0$, то существует $\beta > 0$ такое, что $v(x) < \alpha$ при $\|x\| < \beta$. Если предположить, что $\|x(t^*)\| < \beta$, то $g(t^*) = v(x(t^*)) < \alpha$, а это невозможно ввиду монотонности g. Таким образом, $\beta \leq \|x(t)\| \leq a$, через γ обозначим $\sup\{\dot{v}(x) : \beta \leq \|x\| \leq a\} < 0$.

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \dot{g}(\tau) d\tau = g(0) + \int_0^t \dot{v}(x(\tau)) d\tau \quad \Rightarrow \quad g(t) \leq g(0) + \gamma t$$

И так, предположив, что $\alpha > 0$, мы пришли к противоречию $g(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, значит, $\alpha = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

Докажем, наконец, от противного, что $x(t) \to 0$. Рассмотрим последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x(t_n) \to x^* \neq 0$. Здесь можно рассматривать последовательность $x(t_n)$ имеющую предел, так как все $x(t_n)$ лежат в шаре – компакте. В итоге приходим к $g(t_n) = v(x(t_n)) \to v(x^*) > 0$, что невозможно. $\square$

3°. Теорема Четаева о неустойчивости

Теорема. *Пусть существуют открытое множество* Π *и функция* $v(x)$ *такие, что*

1) $\overline{\Pi} \subset \widetilde{M}$, $0 \in \partial\Pi$,
2) $v(x) \in C(\overline{\Pi}, \mathbb{R})$, $v(x) \in C^1(\Pi, \mathbb{R})$ *и* $v(x) > 0, \dot{v}(x) > 0$ *на* Π,
3) $\exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall\, x \in \partial\Pi \quad \|x\| \le \varepsilon_0 \;\Rightarrow\; v(x) = 0$.

Тогда нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. От противного, пусть нулевое решение устойчиво, тогда можно выбрать $x_0 \in \Pi$ так, что решение $x(t)$, $t \in [0, +\infty)$ задачи Коши с начальной точкой $(0, x_0)$ остается в шаре радиуса ε_0 при $t \in [0, +\infty)$. Определим $g(t) = v(x(t))$, $t \in [0, +\infty)$. Заметим, что $\dot{g}(t) = \dot{v}(x(t)) > 0$, если $x(t) \in \Pi$ и тогда $g(t) \ge g(0) = v(x(0)) = v(x_0) = \alpha > 0$. При этом, действительно, $x(t) \in \Pi$: решение не покидает шара радиуса ε_0, поэтому покинуть Π может только через часть $\partial\Pi$, лежащую в ε_0-шаре, но на этой части $v(x) = 0$, а $g(0) > 0$ и $\dot{g}(0) > 0$, значит, $g(t) = v(x(t)) > 0$ при $t \in [0, +\infty)$. Рассмотрим $B = \{x \in \overline{\Pi} :\ v(x) \ge \alpha,\ \|x\| \le \varepsilon_0\}$, $x(t) \in B$, $\gamma = \inf\{\dot{v}(x) : x \in B\} > 0$.

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \dot{g}(\tau)d\tau \ge g(0) + \gamma t \quad \Rightarrow \quad v(x(t)) \ge v(x_0) + \gamma t$$

Последнее неравенство указывает на противоречие: функция $v(x)$ ограничена как непрерывная на компакте $\overline{\Pi}$. $\square$

§ 2. Замена координат в автономных системах

$$\dot{y} = F(y) \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(M, \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

$$p \in M \quad F(p) = 0 \quad A = DF(p)$$

Пусть h – диффеоморфизм класса C^1 окрестности U точки p на окрестность V нуля.

$$\dot{x} = Dh(y)\dot{y} = Dh(y)F(y)$$

$$\dot{x} = Dh(h^{-1}(x))F(h^{-1}(x)) = Q(x) \tag{2}$$

Теорема. *Пусть* $y(t)$, $t \in I$ *– решение системы (1) такое, что* $y(t) \in U$ *при* $t \in I$*, тогда* $x(t) = h(y(t))$, $t \in I$ *– решение системы (2) и* $x(t) \in V$ *при* $x \in I$.

Теорема. *Пусть* $x(t)$, $t \in I$ *– решение системы (2) такое, что* $x(t) \in V$ *при* $t \in I$*, тогда* $y(t) = h^{-1}(x(t))$, $t \in I$ *– решение системы (1) и* $y(t) \in U$ *при* $x \in I$.

Теорема. *Тип устойчивости особой точки* p *системы (1) совпадает с типом устойчивости особой точки* 0 *системы (2).*

Упражнение. Доказать последние три утверждения.

Дополнительные сведения

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа вещественной матрицы A с учетом их кратности. **Спектральной матрицей** для матрицы A называется $n \times n$ матрица

$$I = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \alpha & -\beta & & & \\ & \beta & \alpha & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

где на главной диагонали стоят 2×2 блоки, соответствующие невещественным собственным числам $\alpha \pm i\beta$, и 1×1 блоки, соответствующие вещественным собственным числам μ.

Лемма. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда* $(\min Re\lambda_j)\|x\|^2 \leq \langle x, Ix\rangle \leq (\max Re\lambda_j)\|x\|^2$

Доказательство.

$$Ix = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \alpha & -\beta & & & \\ & \beta & \alpha & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha x_i - \beta x_{i+1} \\ \beta x_i + \alpha x_{i+1} \\ \vdots \\ \mu x_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\langle x, Ix\rangle = \ldots + \alpha x_i^2 - \beta x_i x_{i+1} + \beta x_i x_{i+1} + \alpha x_{i+1}^2 + \ldots + \mu x_k^2 = \sum_{j=1}^{n} Re\lambda_j x_j^2$$

Откуда легко следует доказываемое утверждение. □

Вещественная жорданова форма

Вещественной жордановой ε-клеткой размера r, соответствующей вещественному числу μ $(\varepsilon > 0)$ будем называть $r \times r$ матрицу

$$J_r(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mu & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}$$

Вещественной жордановой ε-клеткой размера $2r$, соответствующей паре чисел $\alpha \pm i\beta$ $(\varepsilon > 0$, $\beta > 0)$ будем называть $2r \times 2r$ матрицу

$$J_{2r}(\alpha \pm i\beta, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \varepsilon & 0 & & & & \\ \beta & \alpha & 0 & \varepsilon & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \varepsilon & 0 \\ & & & & \ddots & & 0 & \varepsilon \\ & & & & & & \alpha & -\beta \\ & & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Определение. **Жордановой ε-матрицей** называется блочнодиагональная матрица, блоками которой являются вещественные жордановы ε-клетки.

Теорема. *(Вещественный вариант теоремы Жордана)*
*При любом $\varepsilon > 0$ для любой вещественной $n \times n$ матрицы A существует вещественная жорданова ε-матрица и вещественная невырожденная матрица S такие, что $AS = SJ$. Такая матрица J называется **жордановой ε-формой матрицы** A.*

Пусть I – спектральная матрица для A, J – жорданова ε-форма матрицы A, рассмотрим матрицу $B = \frac{1}{\varepsilon}(J - I)$. Матрица B состоит лишь только из нулей и единиц, таких матриц (при фиксированном размере) конечное число, а значит, существует "универсальная" оценка K на норму любой такой матрицы B, то есть $\exists K > 0 : \; \|B\| \leq K$. В двух следующих параграфах за этой оценкой закреплено обозначение K.

§ 3. Теорема об асимптотической устойчивости особой точки автономной системы

$$\dot{y} = F(y) \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times M \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F(y) \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$$

$$p \in M \quad F(p) = 0 \quad A = DF(p)$$

Теорема. *Если вещественные части всех собственных чисел матрицы $DF(p) = A$ отрицательны, то особая точка p асимптотически устойчива.*

Доказательство. Пусть $M = \max Re\lambda_j < 0$ и выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon K < \frac{|M|}{4}$. Пусть J – вещественная жорданова ε-форма матрицы A с матрице перехода S, спектральная матрица $I = J|_{\varepsilon=0}$. Произведем замену $x = S^{-1}(y - p) = h(y)$ – диффеоморфизм класса C^{-1}. Такая замена приведет нас к рассмотрению системы

$$\dot{x} = Q(x) \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times h(M) \quad Q(x) = S^{-1}F(p + Sx) \tag{2}$$

При этом, тип устойчивости особой точки p системы (1) совпадает с типом устойчивости особой точки 0 системы (2).

$$\dot{x} = Q(x) = S^{-1}F(p + Sx) = DQ(0)x + g(x) = S^{-1}ASx + g(x) = J + g(x) \quad \|g(x)\| = o\|x\|$$

Выберем теперь $r > 0$ столь малым, что $\|g(x)\| \leq \frac{|M|}{4}\|x\|$ в шаре $B(r, 0)$ и используем теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости с функцией $v(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2$.

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) = \langle x, \dot{x}\rangle = \langle x, Jx + g(x)\rangle = \langle x, Ix + \varepsilon Bx + g(x)\rangle = \\ = \langle x, Ix\rangle + \varepsilon\langle x, Bx\rangle + \langle x, g(x)\rangle \leq M\|x\|^2 + \varepsilon\|x\|\|Bx\| + \|x\|\|g(x)\| < \\ < M\|x\|^2 + \varepsilon K\|x\|^2 + \frac{|M|}{4}\|x\|^2 < M\|x\|^2 + \frac{|M|}{2}\|x\|^2 = \frac{M}{2}\|x\|^2 < 0 \quad \forall x \in B(r, 0)\backslash\{0\}\end{aligned}$$

Функция $v(x)$ и окрестность нуля $B(r, 0)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Ляпунова, таким образом, нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво. □

§ 4. Теорема о неустойчивости особой точки автономной системы

$$\dot{y} = F(y) \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times M \quad M \text{ открыто в } \mathbb{R}^n \quad F(y) \in C^1(M, \mathbb{R}^n)$$

$$p \in M \quad F(p) = 0 \quad A = DF(p)$$

Теорема. *Если вещественная часть хотя бы одного собственного числа матрицы $DF(p) = A$ положительна, то особая точка p неустойчива.*

Доказательство. Можно считать, что именно первые $s \leq n$ собственных чисел матрицы A имеют положительные вещественные части, тогда спектральная матрица I представится в виде

$$I = \begin{pmatrix} I^+ & 0 \\ 0 & I_0 \end{pmatrix}$$

Введем обозначение $a = \min\{Re\lambda_1, \dots, Re\lambda_s\} > 0$, тогда $\langle \xi, I^+\xi \rangle \geq a\|\xi\|^2$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^s$, кроме того, $\langle \eta, I_0\eta \rangle \leq 0$ при любом $\eta \in \mathbb{R}^{n-s}$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon K < \frac{a}{16}$. Пусть J – жорданова ε-форма матрицы A с матрицей перехода S. Произведем замену $x = S^{-1}(y-p) = h(y)$ – диффеоморфизм класса C^{-1}. Такая замена приведет нас к рассмотрению системы

$$\dot{x} = Q(x) \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times h(M) \quad Q(x) = S^{-1}F(p + Sx) \tag{2}$$

При этом, тип устойчивости особой точки p системы (1) совпадает с типом устойчивости особой точки 0 системы (2).

$$\dot{x} = Q(x) = S^{-1}F(p + Sx) = DQ(0)x + g(x) = S^{-1}ASx + g(x) = J + g(x) \quad \|g(x)\| = o\|x\| \tag{3}$$

Запишем вектор x в виде $x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, где ξ – первые s компонент вектора x, η – последние $n - s$. Тогда система (3) перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi} = I^+\xi + \varepsilon(Bx)_1 + g_1(x) \\ \dot{\eta} = I_0\eta + \varepsilon(Bx)_2 + g_2(x) \end{cases}$$

Выберем теперь $r > 0$ столь малым, что $\|g(x)\| \leq \frac{a}{16}\|x\|$ в шаре $B(r, 0)$ и рассмотрим множество $\Pi = \{x = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} : \ \|x\| \leq r, \ \|\xi\| > \|\eta\|\}$. Используем теорему Четаева о неустойчивости с функцией $v(x) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 - \frac{1}{2}\|\eta\|^2$.

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \left\langle \xi, I^+\xi + \varepsilon(Bx)_1 + g_1(x) \right\rangle - \langle \eta, I_0\eta + \varepsilon(Bx)_2 + g_2(x) \rangle = \\ &= \left\langle \xi, I^+\xi \right\rangle + \varepsilon \langle \xi, (Bx)_1 \rangle + \langle \xi, g_1(x) \rangle - \langle \eta, I_0\eta \rangle - \varepsilon \langle \eta, (Bx)_1 \rangle - \langle \eta, g_1(x) \rangle = \\ &= a\|\xi\|^2 - \varepsilon K 2\|\xi\|^2 - \frac{a}{16}2\|\xi\|^2 + 0 - \varepsilon K 2\|\|\xi\|^2 - \frac{a}{16}2\|\xi\|^2 = \\ &= \|\xi\|^2(a - 4\varepsilon K - \frac{a}{4}) \geq \|\xi\|^2(a - \frac{a}{4} - \frac{a}{4}) = \frac{a}{2}\|\xi\|^2 > 0 \quad \forall x \in \Pi \end{aligned}$$

При преобразованиях использовалось неравенство $\|(Bx)_{1,2}\| \leq K2\|\xi\|$, действительно,

$$\|(Bx)_{1,2}\| \leq \|Bx\| \leq \|B\|\|x\| \leq \|B\|(\|\xi\| + \|\eta\|) \leq K2\|\xi\| \quad \forall x \in \Pi$$

Функция $v(x)$ и множество Π удовлетворяют всем условиям теоремы Четаева, таким образом, нулевое решение системы (2) неустойчиво. □

Программа экзамена по курсу

1. Структура множества максимально продолженных решений ОЛУ.
2. Лемма о частичном овеществлении ф.с.р.
3. Характеристический многочлен АОЛУ. Построение ф.с.р. в случае простоты его корней.
4. Линейная независимость квазиодночленов.
5. Теорема Эйлера о ф.с.р. АОЛУ.
6. Структура множества решений НЛУ.
7. Метод вариации произвольных постоянных для НЛУ.
8. Метод неопределенных коэффициентов.
9. Сведение общей системы к нормальной. Векторная запись нормальной системы.
10. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению.
11. Лемма Гронуолла (док-во для случая $t \leq t0$).
12. Связь между локальным и глобальным условиями Липшица.
13. Теорема о единственности задачи Коши.
14. Теорема Пикара.
15. Существование последовательных приближений Пикара на промежутке Пеано.
16. Предельная теорема.
17. Теорема Пеано.
18. Критерий продолжимости решения.
19. Свойства непродолжимых решений.
20. Теорема о выходе решения на границу компакта.
21. Лемма о решениях, близких к нулевому.
22. Лемма о разности двух решений.
23. Теорема об интегральной непрерывности.
24. Почти линейные системы.
25. Теорема существования и единственности для ЛС.
26. Структура множества решений ОЛС.
27. Фундаментальная матрица решений.
28. Формула Лиувилля.
29. Матрица Коши для ОЛС.
30. Неоднородная линейная система (НЛС).
31. Построение ф.с.р. АОЛС в случае простоты собственных чисел её матрицы.
32. Матричные степенные ряды.
33. Матричная экспонента.

34. Непрерывность решения по начальным данным.
35. Следствия из теоремы о дифференцируемости решения по начальным данным.
36. Зависимость решения от параметра.
37. Характеристическое свойство автономной системы (АС).
38. Свойство единственности траектории.
39. Покой, непериодическое движение и их траектории.
40. Замкнутая траектория.
41. Свойства инвариантных множеств.
42. Лемма о полутраектории в компакте.
43. Существование точки покоя в полуинвариантном диске.
44. Невырожденные точки покоя на плоскости: фокусы, центры и центрофокусы.
45. Невырожденные точки покоя на плоскости: седла и узлы.
46. Устойчивость по Ляпунову. Сведение к исследованию устойчивости нулевого решения.
47. Характеристическое свойство устойчивости решений линейной системы.
48. Критерий устойчивости ОЛС.
49. Критерий асимптотической устойчивости ОЛС.
50. Устойчивость решений АОЛС (критический и некритический случаи).
51. Теорема об асимптотической устойчивости по первому приближению.
52. Теорема об устойчивости по линейному приближению.
53. Оценка матричной экспоненты.
54. Свойство стационарного интеграла АС.
55. Независимые стационарные интегралы.
56. Мультипликаторы периодической линейной системы и матрица монодромии.
57. Теорема Флоке.
58. Теорема Ляпунова об устойчивости.
59. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
60. Теорема Четаева о неустойчивости.
61. Теорема об асимптотической устойчивости особой точки АС.
62. Теорема о неустойчивости особой точки АС.